

# HYDRODYNAMISK ANALYSE AV TO NÆRLIGGENDE GEOMETRIER PÅ FRI OVERFLATE

av

TROND SVANDAL

**MASTEROPPGAVE**

*for graden*

***Master i anvendt matematikk og mekanikk***

*(Master of Science)*



*Det matematisk- naturvitenskapelige fakultet  
Universitetet i Oslo*

*Mai 2015*

*Faculty of Mathematics and Natural Sciences*

*University of Oslo*



# HYDRODYNAMISK ANALYSE AV TO NÆRLIGGENDE GEOMETRIER PÅ FRI OVERFLATE

AV

TROND SVANDAL



## Sammendrag

Det er betraktet to rektangulære geometrier på en fri overflate i 2-D. Når geometriene er adskilt med en liten spalteavstand kan det oppstå stor vertikal bevegelse av væsken. Vanlige lineære "sea keeping" programmer overpredikterer beregninger av bølgehevningen i en slik situasjon, noe som kan gi begrensninger på design av skipsskrog. Denne vertikal bevegelsen blir først i denne oppgaven analysert ved lineær teori i eget designet program og i Sesam<sup>TM</sup> HydroD. Deretter utvikles det to modeller som kan gi mer korrekt oppførsel av vertikal bevegelsen. Den ene modellen tar for seg en viskøs effekt i form av friksjon som oppstår mellom geometri og væske. Den andre tar for seg ikke-lineært bidrag fra overflatebetingelsen mellom geometriene. Disse modellene blir så testet ut på forskjellige situasjoner.



# Innhold

<b>Forord</b>	<b>VII</b>
<b>1 Innledning</b>	<b>1</b>
1.1 Introduksjon . . . . .	1
1.2 Metode og gjennomføring . . . . .	4
<b>2 Lineær teori</b>	<b>7</b>
2.1 Randverdiproblemet . . . . .	7
2.2 Integralligning for randverdiproblemet . . . . .	10
2.2.1 Potensialformulering . . . . .	10
2.2.2 Numerisk form av integralligningene . . . . .	12
2.2.3 Komponentene i den induerte hastighetsmatrisen . . . . .	13
2.3 Lineære krefter og bevegelser . . . . .	16
2.3.1 Lineære krefter . . . . .	16
2.3.2 Lineære bevegelser . . . . .	18
2.4 Lineære beregninger . . . . .	20
2.4.1 Kreftene i hiv . . . . .	21
2.4.2 "Respons amplitude operator" i hiv . . . . .	23
2.4.3 Bølgehevning . . . . .	24

<b>3 Ikke-lineære effekter</b>	<b>25</b>
3.1 Heft . . . . .	26
3.1.1 Matematisk formulering . . . . .	26
3.1.2 Integralligning for heft . . . . .	28
3.1.3 Analyse av tvunget bevegelse i hiv . . . . .	30
3.1.4 Analyse av fastholdt geometri . . . . .	35
3.1.5 Analyse av frittflytende geometri i et innkommende bølgefelt . . . . .	38
3.2 Endelig utslag . . . . .	41
3.2.1 Matematisk formulering . . . . .	41
3.2.2 Integralligning for endelig utslag . . . . .	43
3.2.3 Analyse av tvunget bevegelse i hiv . . . . .	44
3.2.4 Analyse av fastholdt geometri . . . . .	48
3.2.5 Analyse av frittflytende geometri i et innkommende bølgefelt . . . . .	52
3.3 Endelig utslag og heft . . . . .	55
3.3.1 Analyse av tvunget bevegelse i hiv . . . . .	55
3.3.2 Analyse av fastholdt geometri . . . . .	59
3.3.3 Analyse av frittflytende geometri i et innkommende bølgefelt . . . . .	61
<b>4 Konklusjon</b>	<b>63</b>
<b>Tillegg</b>	<b>65</b>
<b>A</b>	<b>67</b>
A.1 Greens teorem . . . . .	67
A.2 2-D Green funksjon . . . . .	69
A.3 3-D Green funksjon . . . . .	71
<b>B Verifisering av 2-D lineær løser</b>	<b>73</b>
B.1 Numerisk mot eksperimentell . . . . .	73
B.2 Energisjekk . . . . .	75



<i>INNHold</i>	V
<b>C</b>	<b>79</b>
C.1 Fjerning av irregulær frekvens . . . . .	79
<b>D</b>	<b>85</b>
D.1 Ekvivalent linearisering . . . . .	85
<b>E</b>	<b>87</b>
E.1 Løser av potensialet på randen . . . . .	87
E.2 Script av den iterativ metoden . . . . .	96



# Forord

I arbeidet med denne masteroppgaven vil jeg først og fremst takke min veileder professor John Grue for oppfølgingen og utfordringene du har gitt meg. Jeg vil også takke Dr. Scient Torgeir Vada (Product Manager ved DNV GL Software) for oppfølging og diskusjon, og ikke minst at jeg, under deler av arbeidet med oppgaven fikk muligheten til å sitte på Høvik med så mange hyggelige folk. Jeg vil tillegg gi en spesiell takk til Kevin Markeng for å være min sparringspartner gjennom denne perioden. Camilla Helms takkes varmt for å være tålmodig og hjelpsom. Sist med ikke minst vil jeg takke alle medstudenter på lesesalen for en hyggelig tid sammen.

Trond Svandal

Oslo, Mai 2015



# Kapittel 1

## Innledning

### 1.1 Introduksjon

Det er økende aktivitet i den marine industrien til havs, og dette har ført til en utvikling av forskjellige konstruksjoner. En av disse konstruksjonene er offloadterminaler. Ved slike terminaler lastes produktet over fra et skip til et annet. Et eksempel på en slik operasjon kan være LNG-Carrier (Liquefied Natural Gas) til en FPSO (Floating Production Storage & Offloading) eller GBS (Gravity Base Structure).

Enhentene i terminalen er som oftest nær hverandre for kunne laste produktene på en sikker måte. Et fenomen som kan oppstå i en slik situasjon er stor resonant vertikal bevegelse av bølgehevingen i spalten mellom enhetene. Ved å analysere et slik problem med vanlige lineære beregninger utført med potensialteori, har det blitt observert at Response Amplitude Operator (RAO) kan overpredikeres. For å håndtere dette problemet har det blitt utviklet flere metoder.

Huijsmans et al. [5] anvender en teknikk hvor man ser for seg at det blir lagt et lokk over overflaten i spalten. Teknikken som brukes minner om den som anvendes for å fjerne irregulære frekvenser i integralligningen. Dette er en effektiv metode for å dempe overflatehevingen, men den representerer ikke fysikken korrekt.

Chen XB [3] har i sin metode introdusert en kraft

$$f = \mu \vec{v}, \tag{1.1.0.1}$$

hvor  $\vec{v}$  er hastigheten og  $\mu$  er konstant. Man kan se på kraften som et energidissiperende ledd lik den i væskeviskositeten. Konstanten  $\mu$  endrer seg i forhold til geometri og avstand, noe som

gjør det vanskelig å angi korrekt verdi uten å ha utført et eksperiment. I senere tid har Chen og Lu [2] forsøkt å relatere parameteren  $\mu$  til friksjonskraften som oppstår mellom geometrien og væsken i spalten.

Newman [15] anvender en semi-empirisk dempningsfaktor hvor det blir lagt et lokk på den frie overflaten. Her trengs et tilstrekkelig antall generaliserte dempningsmoder for å representere variasjonen over spalten.



Figur 1.1.0.1: FPSO (Floating Production Storage & Offloading) (Kawasaki [7])

Det er spesielt to arbeider på et slikt problem som har fasinert forfatter. Det ene er utført av Marthinsen og Vinje [10] hvor de i sin analyse inkluderer ikke-lineær betingelse på overflaten i spalten, og dempning grunnet friksjon. Dempningen er inkludert som et kvadratisk ledd, og de har løst problemet ved å dele væskedomenet i tre. Domene *I* i spalten hvor ikke-lineær betingelse og dempning blir anvendt, domene *II* ved inngangen til spalten, og domene *III* som representerer det resterende væskeområdet. I domene *III* anvendes lineær teori, og løsningen fra hvert domene blir asymptotisk ”matchet”. Med denne metoden kommer de frem til at den ikke-lineære effekten gir størst bidrag til reduksjon av bølgehevingen i spalten. Det er også

viktig å nevne at de får god overenstemmelse mellom beregninger utført ved vanlig lineær potensialteori, og deres metode når de sammenligner addert masse og dempningskoeffisienten i svai. I hiv derimot er det ikke så god overenstemmelse.

Det andre arbeidet er et numerisk og eksperimentelt arbeid utført av Molin et al. [13]. Her har de undersøkt hvordan forskjellige utforminger på geometriene påvirker bølgehevningen i spalten. De har også sammenlignet eksperimentelle resultater med numeriske beregninger utført ved linær potensialteori. De konkluderer med at forskjellen mellom de numeriske beregningene og de eksperimentelle resultatene hovedsaklig skyldes separasjonstrøm rundt skarpe kanter på geometrien.

I denne masteroppgaven er det tatt for seg et tilsvarende problem, hvor det utforskers krefter og bølgehevning mellom to flytende geometrier som er koblet slik at de responderer som en. Det er begrenset til et todimensjonalt (2-D) problem hvor spalteåpningen mellom geometriene er tilstrekkelig liten slik at bevegelsen kan sees på som en oscillerende væskesøyle uten variasjon over spalten. Denne oppførselen kalles ofte for "piston-mode" bevegelse, og det er denne som har blitt analysert i dette arbeidet.

Det vil bli presentert lineære resultater og to ikke-lineære metoder som kan bidra til å øke forståelsen til de kompliserte effektene som oppstår i en slik analyse. Den ene metoden tar for seg effekter fra endelig utslag. Den andre beskriver dempning gjennom friksjon fra geometri. Problemet blir løst med potensialteori, og det er utviklet et program i Python basert på Boundary Element Method (BEM), hvor randverdiproblemet blir løst.

## 1.2 Metode og gjennomføring

Målet med denne oppgaven er å analysere krefter og bølgehevning for to rektangulære geometrier på en fri overflate adskilt med en liten spalte. Avstanden mellom skipene er tilstrekkelig liten slik at det kan oppstå store vertikale hastigheter i spalteåpningen. Det er kun fokusert på den første naturlige perioden som kalles ”piston mode”. ”Piston mode” kan sees på som en sylinder som beveger seg opp og ned slik at det ikke er noe variasjon over spalten mellom geometriene. I denne oppgaven er det fokusert på å øke forståelsen av den komplekse problemstillingen som oppstår i en slik situasjon.

I kapittel (2) blir det lineære problemet presentert. Seksjon (2.1) tar for seg alle betingelsene hastighetspotensialet må tilfredstille, og det blir forklart hvilke komponenter hastighetspotensialet består av. I seksjon (2.2) blir integralligningen som brukes for å løse randverdiproblemet presentert. Her forklares det hvilke funksjon som brukes i integralligningen for å finne potensialet. Svakheten med metoden blir også forklart. I underseksjon (2.2.2) blir det vist hvordan integralligningen blir løst numerisk. Seksjon (2.3) forklarer hvordan kreftene beregnes når man har funnet hastighetspotensialet. Her blir det vist hvilke ledd som gir den adderte masse, dempning og eksitasjonskraft. Det blir også presentert en bevegelsesligning som kan løses for bevegelsen til geometriene. I seksjon (2.4) blir det presentert resultater fra lineære beregninger utført i et program utviklet av forfatter, og kommersiell programvare som leveres av DNV-GL.

I kapittel (3) blir det presentert to metoder som gir korreksjon til potensialet i spalten. Disse metodene blir først behandlet separat, for så å kombineres. Den første metoden blir behandlet i seksjon (3.1). Her antas at det vil oppstå en friksjonskraft fra geometriene på væsken i spalten. Det blir presentert en matematisk formulering som gir opphav til en ny betingelse potensialet må oppfylle, og det blir utledet en ny integralligning som må løses. Denne metoden blir så testet ut på tre forskjellige situasjoner. Den første situasjonen er presentert i underseksjon (3.1.3). Den beskriver problemet hvor geometriene blir tvunget til å svinge med en gitt amplitude. Her blir det vist resultater fra beregning av bølgehevningen, den adderte massen og dempning. Den andre situasjonen blir presentert i underseksjon (3.1.4). Her blir det sendt bølger mot geometriene, mens de er fastholdt slik at den ikke får respondere. Det vises resultater fra beregning av bølgehevning og eksitasjonskraft. Den siste situasjonen er presentert i underseksjon (3.1.5). Her får geometrien respondere fritt til den innkommende bølgen. Det vises beregning av bølgehevning, bevegelsen til geometriene.

Den andre metoden som gir korreksjon til potensialet blir presentert i seksjon (3.2). Her Taylor-utvikles grensebetingelsen på den frie overflaten mellom geometriene slik at ledd av høyere orden



blir tatt med i beregningene. Den matematiske tilnærmingen blir presentert i underseksjon (3.2.1), og det blir også utledet en ny integralligning som må løses. Denne metoden blir så på lik linje med den foregående metoden, testet på de samme situasjonene. I den første situasjonen vist i underseksjon (3.2.3) (hvor geometriene blir tvunget til å svinge med en gitt amplitude), blir det presentert resultater fra beregning av bølgehevning, addert masse og dempning. I situasjon nummer to vist i underseksjon (3.2.4) er det en innkommende bølge og geometriene er fastholdt. Her blir det vist resultater fra beregnet bølgehevning og eksitasjonskraft. I den siste situasjonen får geometriene respondere til den innkommende bølgen, og det blir vist resultater fra beregnet bølgehevning, og bevegelsen til geometriene.

I seksjon (3.3) blir metodene ovenfor slått sammen slik at det totale potensialet får et bidrag fra begge metodene. Her blir det brukt en iterativ metode for å kontrollere et ledd som skal vise seg å bli problematisk. Deretter blir problemet løst for de tre situasjonene som er beskrevet ovenfor. I underseksjon (3.3.1) løses problemet for tvunget bevegelse, og her blir det vist resultater fra beregnet bølgehevning, addert masse og dempning. Underseksjon (3.3.2) tar for seg det fastholdte problemet, og her blir det vist resultater fra beregnet bølgehevning og eksitasjonskraft. Underseksjon (3.3.3) tar for seg det frittflytende problemet hvor geometriene får respondere til den innkommende bølgen. Her blir det vist resultater fra beregnet bølgehevning og bevegelse til geometriene.



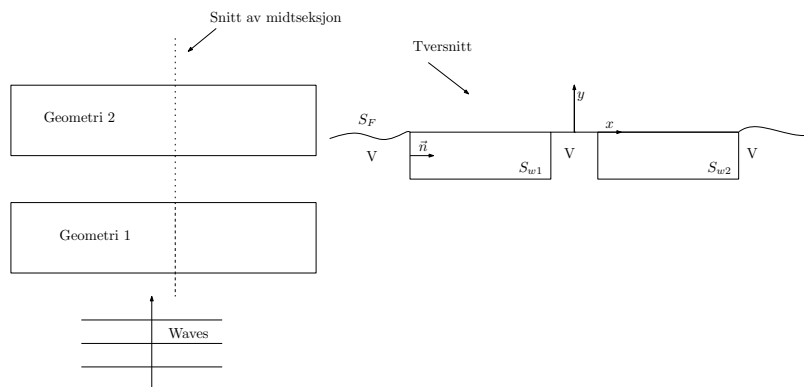
# Kapittel 2

## Lineær teori

### 2.1 Randverdiproblemet

To ubøyelige rektangulære geometrier, som flyter i et regulært bølgefelt med en liten amplitude  $A$  i uendelig vanndyp, er betraktet. Utstrekningen til geometriene antas å være stor i  $z$ - retning slik at problemet kan betraktes 2-D. Det er anvendt et kartetisk koordinatsystem  $O$ - $xy$  med  $x$ -aksen langs den midlere overflaten, og  $y$ -aksen er positivt rettet i vertikalen, se figur (2.1.0.1). Geometriene er koblet sammen slik at de responderer som en geometri, og normalvektoren  $\vec{n}$  er rettet ut av væsken.

Væskedomenet er definert som  $V$ , den frie overflaten som  $S_F$ , randa til geometri som  $S_w = S_{w1} + S_{w2}$ , hvor  $S_{w1}$  er randa til geometri 1 og tilsvarende for  $S_{w2}$ .

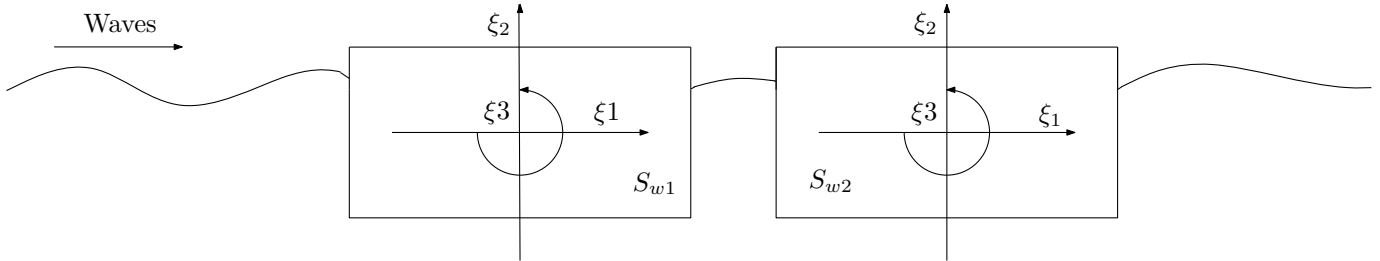


Figur 2.1.0.1: Koordinatsystem for 2-D flytende geometri

Videre antas det at væsken er homogen, inkompressibel og strekker seg uendelig i negativ y-retning. Viskositet og overflatespenning er neglisjert slik at det eksisterer et hastighetspotensiale som beskriver hastighetene til væsken, denne relasjonen er gitt som  $\vec{v} = \nabla\Phi$ . Ved antagelsen at den innkommende bølgen har liten amplitude kan hastighetspotensialet defineres som

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{x}, t) &= \Re\{\phi(\vec{x})e^{i\omega t}\} \\ &= \Re\{[A\phi_D(\vec{x}) + i\omega \sum_{j=1}^3 \xi_j \phi_j]e^{i\omega t}\}.\end{aligned}\tag{2.1.0.1}$$

Her er  $A$  den innkommende bølgeamplituden,  $\phi_D$  diffraksjonspotensialet,  $\xi_j$  amplituden til hver av bevegelsesmodene (svai, hiv og rull), hvor  $\xi_1$  tilhører svai,  $\xi_2$  hiv, og  $\xi_3$  rull, dette er forklart i figur(2.1.0.2).  $\Re$  betegner at det er realdelen som er av interessant verdi.



Figur 2.1.0.2: Bevegelsen til geometriene

$\phi_j$  er radiasjonspotensialet med enhetsamplitude, hvor  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  og  $\phi_3$  tilhører samme bevegelsesmoder som amplituden  $\xi_j$ .

Grunnet tilstedeværelse av geometri i væsken, resulterer dette til at diffraksjonspotensialet kan dekomponeres til

$$\phi_D = \phi_0 + \phi_7,\tag{2.1.0.2}$$

hvor  $\phi_0$  beskriver den innkommende bølgen definert som

$$\phi_0 = \frac{ig}{\omega} e^{ky - ikx},\tag{2.1.0.3}$$

og  $\phi_7$  er spredningspotensialet.  $\omega$  er gitt som frekvensen til den innkommende bølgen,  $k$  som bølgetallet, og  $g$  er tyngdens akselerasjon. Disse er relatert ved dispersjonsrelasjon for gravitasjonsbølger ved dypt vann

$$\omega^2 = gk.\tag{2.1.0.4}$$

Fra antagelsene gjort tidligere vil potensialene  $\phi_j$  fra  $j = 1, 2, 3$  og  $7$  tilfredstille Laplace lignin-

gen i væsken

$$\nabla^2 \phi_j = 0, \quad \text{for } j = 1, 2, 3 \text{ og } 7. \quad (2.1.0.5)$$

Betingelsen ved den frie overflaten er gitt som

$$-k\phi_j + \frac{\partial \phi_j}{\partial y} = 0, \quad \text{ved } y = 0, \quad j = 0, 1, 2, 3 \text{ og } 7. \quad (2.1.0.6)$$

På geometrien tilfredstiller diffraksjonspotensialet

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_D}{\partial n} &= 0 \\ \frac{\partial \phi_7}{\partial n} &= -\frac{\partial \phi_0}{\partial n}, \text{ på } S_w, \end{aligned} \quad (2.1.0.7)$$

hvor  $\frac{\partial}{\partial n}$  er den normalderivate, og  $\vec{n} = (n_x, n_y)$  er enhets normal vektorer rettet ut av væsken.

Ved å definere hastigheten til geometriene som

$$U_j(t) = \Re\{i\omega\xi_j e^{i\omega t}\}, \text{ for } j = 1, 2, 3 \quad (2.1.0.8)$$

følger det at radiasjonspotensialene må tilfredstille

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial n} = n_j, \text{ for } j = 1, 2, 3, \quad (2.1.0.9)$$

på  $S_w$ .

I tillegg må bølgene fra potensialene  $\phi_j$ ,  $j = 1, 2, 3$  og 7 tilfredstille radiasjonsbetingelsen

$$\phi_j \propto e^{\mp i k x}, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad j = 1, 2, 3, 7, \quad (2.1.0.10)$$

og

$$\phi_j \rightarrow 0, \quad y \rightarrow -\infty \quad (2.1.0.11)$$

for uendelig vanndyp.

Bølgehevingen er relatert til potensialet ved

$$\eta = \frac{-1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \Re\left\{\frac{-i\omega}{g} \phi e^{i\omega t}\right\}, \text{ på } y=0. \quad (2.1.0.12)$$

## 2.2 Integralligning for randverdiproblemet

Randverdiproblemet er løst ved et Boundary Element Method (BEM) program skrevet i Python som er utviklet av forfatter. Her brukes Green's teorem til å forme integralligninger for potensialet på randen og i feltet.

### 2.2.1 Potensialformulering

Ved å anvende en funksjon  $G(\vec{x}, \vec{a})$  som tilfredstiller betingelsene (2.1.0.5, 2.1.0.6, 2.1.0.10, 2.1.0.11) med Green's teorem, får vi følgende integralligninger for radiasjonspotensialet  $\phi_j$  og spredningspotensialet  $\phi_\tau$  på randen

$$\iint_{S_w} \phi_j(\vec{a}) \frac{\partial G(\vec{a}, \vec{x})}{\partial n} dS - \pi \phi_j = \iint_{S_w} G(\vec{a}, \vec{x}) n_j dS, \quad (2.2.1.1)$$

$$\iint_{S_w} \phi_\tau(\vec{a}) \frac{\partial G(\vec{a}, \vec{x})}{\partial n} dS - \pi \phi_\tau = \iint_{S_w} G(\vec{a}, \vec{x}) \frac{\partial \phi_\tau}{\partial n} dS. \quad (2.2.1.2)$$

$\vec{x} = (x, y)$  er her feltpunktet mens  $\vec{a} = (a, b)$  er kildepunktet på randen til geometriene.  $S_w = S_{w1} + S_{w2}$  er randa til de to geometriene som skal integreres i stille væske. Indeks  $w$  står for "wetted surface". Når integralligningen ovenfor er løst for radiasjon- og spredningspotensialet kan potensialene i feltet finnes ved

$$2\pi \phi_j = \iint_{S_w} \phi_j(\vec{a}) \frac{\partial G(\vec{a}, \vec{x})}{\partial n} dS - \iint_{S_w} G(\vec{a}, \vec{x}) n_j dS, \quad (2.2.1.3)$$

$$2\pi \phi_\tau = \iint_{S_w} \phi_\tau(\vec{a}) \frac{\partial G(\vec{a}, \vec{x})}{\partial n} dS - \iint_{S_w} G(\vec{a}, \vec{x}) \frac{\partial \phi_\tau}{\partial n} dS. \quad (2.2.1.4)$$

I steden for å løse integralligningen for spredningspotensialet, kan man løse diffraksjonsproblemet direkte

$$\pi \phi_D = \iint_{S_w} \phi_D(\vec{a}) \frac{\partial G(\vec{a}, \vec{x})}{\partial n} dS + 2\pi \phi_0(\vec{x}), \quad (2.2.1.5)$$

for  $\phi_D$  på randa, og

$$2\phi_D = \iint_{S_w} \phi_D(\vec{a}) \frac{\partial G(\vec{a}, \vec{x})}{\partial n} dS + 2\pi \phi_0(\vec{x}), \quad (2.2.1.6)$$

i feltet.

Å løse diffraksjonsproblemet med de to nevnte måtene gir en fin sjekk på den numeriske metoden.

Greenfunksjonen som brukes på dette problemet er gitt for uendelig dyp som følgende

$$G_2(\vec{x}, \vec{a}) = \ln r - \ln r_1 - 2p.v \int_0^\infty \frac{1}{k - \nu} e^{k(y+b)} \cos(k(x-a)) dk + 2\pi i e^{\nu(y+b)} \cos(\nu(x-a)), \quad (2.2.1.7)$$

hvor  $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$  og  $r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + (y+b)^2}$ .  $p.v$  står for "principal value". For utledning av Greenfunksjon se tillegg (A.2).

Løsningen av integralligningene lider av irregulære frekvenser og i dette området har ligningene ingen løsning eller ingen unik løsning, John [6]. Det er slik at eksistens av irregulær frekvens ikke har noe med det fysiske å gjøre, men heller med den matematiske formuleringen. For noen geometrier forekommer den irregulære frekvensen i frekvensområdet som analyseres og det kan da være beleilig å fjerne den. Det er flere metoder som er brukt for å fjerne disse hvor noen av de mest kjente er forklart i Zhu [18].

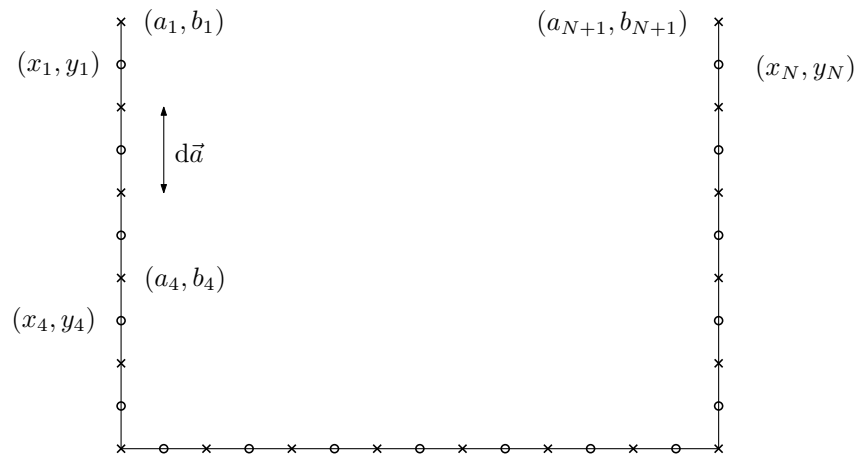
I denne analysen er det brukt en metode som kalles "Modified Green function method", og den går ut på å definere  $\vec{s}$  som punkter på den indre overflaten i geometriene. Dermed kan man ved å kombinere ligning (2.2.1.1) med

$$\iint_{S_w} \phi_j(\vec{a}) \frac{\partial G(\vec{a}, \vec{s})}{\partial n} dS = \iint_{S_w} G(\vec{a}, \vec{s}) n_j dS, \quad (2.2.1.8)$$

fjerne den irregulære frekvensen så lenge  $\vec{s}$  ikke befinner seg i et "nodal point". Resultater fra dette kan sees i tillegg (C.1) hvor det er vist figurer av den adderte massen og dempningen til en flytende sirkulær sylinder med og uten irregulær frekvens.

### 2.2.2 Numerisk form av integralligningene

Geometrien er tilnærmet med  $N$  antall rette linjer, også kalt paneler. Disse rette linjene er beskrevet med posisjonen til endepunktene og midtpunktene. Det er i midtpunktet verdien til potensialet blir lagret. Den enkleste måten å løse problemet på er å anta at potensialet er tilnærmet konstant over hvert panel. Dermed kan man trekke potensialet utenfor integralet og få et lineært ligningsystem å løse.



Figur 2.2.2.1: Skisse av diskretisert geometri.  $(a_j, b_j)$  er endepunktene til panelene,  $(x_i, y_i)$  er midtpunktene til panelene, og  $d\vec{a}$  er lengden til hvert panel



Den diskretiserte integralligningen for radiasjonspotensialet er gitt som

$$-\pi\phi(\vec{x}_i) + \phi(\vec{x}_i) \sum_{j=1}^N L_{ij} = \sum_{j=1}^N J_{ij} \left( \frac{\partial \phi}{\partial n} \right)_j. \quad (2.2.2.1)$$

Hvor  $i = 1, 2, \dots, N$  og  $N$  er antall paneler, og den diskretiserte integralligningen for spredningspotensialet er

$$-\pi\phi_7(\vec{x}_i) + \phi_7(\vec{x}_i) \sum_{j=1}^N L_{ij} = - \sum_{j=1}^N J_{ij} \left( \frac{\partial \phi_0}{\partial n} \right)_j. \quad (2.2.2.2)$$

Her er  $L_{ij}$  og  $J_{ij}$  definert som følgende

$$L_{ij} = \iint_{S_j} \frac{\partial G(\vec{a}, \vec{x}_i)}{\partial n_a} d\vec{a}, \quad (2.2.2.3)$$

$$J_{ij} = \iint_{S_j} G(\vec{a}, \vec{x}_i) d\vec{a}, \quad (2.2.2.4)$$

og  $S_j$  betyr overflaten i det j-th panelet. I tillegg (E.1) er det vedlagt python kode som løser potensialet på randen.

### 2.2.3 Komponentene i den induserte hastighetsmatrisen

Den induserte hastighetsmatrisen er gitt som integralet av den normalderiverte til Greenfunksjonen (2.2.2.3). Derivasjon av leddene som forekommer i denne matrisen er gjort analytisk. I denne analysen er det fornuftig å skrive Greenfunksjonen på kompleks form

$$G_2(z, c) = \ln(z - c) - \ln(z - \bar{c}) - 2 p.v \int_0^\infty \frac{1}{k - \nu} e^{-ik(z - \bar{c})} dk + 2\pi i e^{-i\nu(z - \bar{c})}, \quad (2.2.3.1)$$

hvor  $z = x + iy$ ,  $c = a + ib$  og  $\bar{c}$  den kompleks konjugerte.  $p.v$  er underforstått som ”principal value”. De deriverte av logaritmene blir følgende

$$u_1 = \Re \left\{ \frac{\partial \ln(z - c)}{\partial a} \right\} = \Re \left\{ \frac{\partial \ln(w)}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial a} \right\} = \Re \left\{ \frac{-1}{z - c} \right\}, \quad (2.2.3.2)$$

$$v_1 = \Re\left\{\frac{\partial \ln(z-c)}{\partial b}\right\} = \Re\left\{\frac{\partial \ln(w)}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial b}\right\} = \Re\left\{\frac{-i}{z-c}\right\}, \quad (2.2.3.3)$$

$$u_2 = \Re\left\{\frac{\partial \ln(z-\bar{c})}{\partial a}\right\} = \Re\left\{\frac{-1}{z-\bar{c}}\right\}, \quad (2.2.3.4)$$

$$v_2 = \Re\left\{\frac{\partial \ln(z-\bar{c})}{\partial b}\right\} = \Re\left\{\frac{i}{z-\bar{c}}\right\}. \quad (2.2.3.5)$$

”Principal value” integralet i ligning (2.2.3.1) blir udefinert i punktet  $k = \nu$ , og dermed kan integralet skrives som

$$p.v \int_0^\infty \frac{e^{-ik(z-\bar{c})}}{k-\nu} dk = \int_0^\infty \frac{e^{-ik(z-\bar{c})}}{k-\nu} dk \pm i\pi e^{-i\nu(z-\bar{c})}. \quad (2.2.3.6)$$

$\pm$  kommer av den grunn at vi må integrere på oversiden eller undersiden av polen avhengig av hvor man står når man integrerer. Ved å anvende samme substusjon som Frank [4]

$$t = i(k-\nu)(z-\bar{c}) \quad (2.2.3.7)$$

kan integralet skrives som

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ik(z-\bar{c})}}{k-\nu} dk = e^{-i\nu(z-\bar{c})} \int_{-i\nu(z-\bar{c})}^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt. \quad (2.2.3.8)$$

Dette integralet er bedre kjent som ”exponential integral”, og fra Abramowitz og Stegun [1] er integralet definert som

$$E_1(Z) = \int_Z^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt = -\gamma - \ln(Z) - \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n Z^n}{nn!} \quad (|\arg(Z)| < \pi), \quad (2.2.3.9)$$

hvor  $\gamma$  er gitt som Euler-Mascheroni konstanten og  $Z = -i\nu(z-\bar{c})$ . Anvender man dette kan ”principal value” integralet skrives som

$$p.v \int_0^\infty \frac{e^{-ik(z-\bar{c})}}{k-\nu} dk = e^Z [E_1(Z) \pm i\pi]. \quad (2.2.3.10)$$

Nå som "principal value" integralet er skrevet på en enkel form, er det rett frem å derivere. Dette gir

$$\frac{\partial}{\partial a} e^Z [E_1(Z) \pm i\pi] = \frac{\partial e^Z}{\partial a} E_1(Z) + e^Z \frac{\partial E_1(Z)}{\partial a} \pm i\pi \frac{\partial}{\partial a} e^Z, \quad (2.2.3.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial b} e^Z [E_1(Z) \pm i\pi] = \frac{\partial e^Z}{\partial b} E_1(Z) + e^Z \frac{\partial E_1(Z)}{\partial b} \pm i\pi \frac{\partial}{\partial b} e^Z, \quad (2.2.3.12)$$

hvor den deriverte av "exponential integral" blir

$$\frac{\partial E_1(Z)}{\partial a} = \frac{\partial E_1(Z)}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial a} = -\frac{e^{-Z}}{Z} i\nu. \quad (2.2.3.13)$$

Dette gir følgende hastigheter

$$u_3 = \Re\{i\nu E_1(Z) e^Z - \frac{i\nu}{Z} \mp \pi\nu e^Z\}, \quad (2.2.3.14)$$

$$v_3 = \Re\{\nu E_1(Z) e^Z - \frac{\nu}{Z} \pm i\pi\nu e^Z\}. \quad (2.2.3.15)$$

Det siste leddet i Greenfunksjonen blir

$$u_4 = \Re\left\{\frac{\partial}{\partial a} 2\pi e^{-i\nu(z-\bar{c})}\right\} = \Re\{2\pi i\nu e^Z\}, \quad (2.2.3.16)$$

$$v_4 = \Re\left\{\frac{\partial}{\partial b} 2\pi e^{-i\nu(z-\bar{c})}\right\} = \Re\{2\pi\nu e^Z\}. \quad (2.2.3.17)$$

Samlet gir dette følgende induserte hastigheter

$$\frac{\partial G_2(\vec{x}, \vec{a})}{\partial n} = (u_1 + u_2 + u_3 + iu_4)n_a + (v_1 + v_2 + v_3 + iv_4)n_b, \quad (2.2.3.18)$$

hvor  $n_a$  og  $n_b$  er normalvektorene rettet ut av væsken.

## 2.3 Lineære krefter og bevegelser

Når potensialene på randen er funnet, kan man integrere opp trykket og finne kreftene som virker på geometriene. Disse kreftene kan man så bruke til å løse et ligningsystem som gir bevegelsene.

### 2.3.1 Lineære krefter

Trykket er gitt fra Bernoullis ligning

$$p + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\rho}{2} |\nabla \Phi|^2 + \rho g y = C(t), \quad (2.3.1.1)$$

hvor  $C(t)$  er en vilkårlig funksjon og  $\rho$  er massetettheten til væsken. Videre inkluderes  $C(t)$  i hastighetspotensialet og blir betraktet som en konstant.

Ved å substituere ligning (2.1.0.1) inn i Bernoullis ligning å beholde ledd av første orden, kan det totale trykket skrives som følgende

$$\begin{aligned} p &= -\rho \left( \frac{\partial \Phi(\vec{x}, t)}{\partial t} + g y \right), \\ &= -\rho \left( \Re \{ [A \phi_D(\vec{x}) + i\omega \sum_{j=1}^3 \xi_j \phi_j] i\omega e^{i\omega t} \} + g y \right). \end{aligned} \quad (2.3.1.2)$$

Kraften og momentet kan da finnes ved å integrere trykket over det våte arealet

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\rho \Re \{ A i \omega e^{i\omega t} \iint_{S_w} \vec{n} \phi_D dS \} \\ &\quad - \rho \Re \left\{ \sum_{j=1}^3 i \omega \xi_j e^{i\omega t} \iint_{S_w} \vec{n} \phi_j dS \right\} \\ &\quad - \rho g \iint_{S_w} \vec{n} y dS. \end{aligned} \quad (2.3.1.3)$$

Det første leddet i uttrykket for kraften (2.3.1.3) gir eksitasjonskraft og moment

$$F_{ex} = -\rho \Re \{ A i \omega e^{i\omega t} \iint_{S_w} \vec{n} \phi_D dS \}, \quad (2.3.1.4)$$

og her gir  $\vec{n} = (n_x, n_y)$  kraft og  $\vec{n} = (\vec{x} \times \vec{n})$  moment. Dette kan igjen skrives som

$$F_{ex_i} = \Re\{AX_i e^{i\omega t}\}, \quad (2.3.1.5)$$

hvor  $X_i$  er den komplekse kraftamplituden definert

$$X_i = -\rho i\omega \iint_{S_w} \phi_D \frac{\partial \phi_i}{\partial n} dS. \quad (2.3.1.6)$$

Ledd nummer to i ligning (2.3.1.3) gir opphav til kraft og moment fra radiasjonsproblemet og denne kraften kan skrives på følgende form

$$F_i^R = \Re\{-\rho i\omega e^{i\omega t} \sum_{j=1}^3 \xi_j f_{ij}\}. \quad (2.3.1.7)$$

Her er  $f_{ij}$  den komplekse kraftkoeffisienten. Denne gir addert masse og dempning ved

$$f_{ij} \equiv i\omega a_{ij} + b_{ij} = \rho \iint_{S_b} i\omega \phi_j n_i dS, \quad (2.3.1.8)$$

hvor  $a_{ij}$  er den adderte massen og  $b_{ij}$  er dempningen.

### 2.3.2 Lineære bevegelser

Når kreftene er funnet kan man sette opp et ligningssett for bevegelsen til geometrien. Ved å anta at geometrien ikke deformeres ved påført kraft, ikke er forflydd, og er i likestilling når sjøen er rolig, kan man skrive bevegelsesligningen som følgende

$$\sum_{j=1}^3 \xi_j [-\omega^2 (M_{ij} + a_{ij}) + i\omega b_{ij} + c_{ij}] = AX_i. \quad (2.3.2.1)$$

Her er  $M_{ij}$  gitt som massematrisen

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} \end{bmatrix}, \quad (2.3.2.2)$$

hvor massen til geometrien er gitt ved

$$m = \iint_{A_b} \rho_b dA. \quad (2.3.2.3)$$

$\rho_b$  er tettheten til geometrien og  $A_b$  er det fortrenge væskearealet. I følge Arkimedes' prinsipp er oppdriftskraften like stor som den vekt legemet fortrenge. Dermed kan massen relateres til det fortrenge væskevolumet ved

$$m = \rho \forall, \quad (2.3.2.4)$$

hvor  $\forall$  er det fortrenge væskevolumet.

Trehetsmomentet er definert som

$$I_{11} = \iint_{A_b} \rho_b y^2 dA. \quad (2.3.2.5)$$

Bevegelsen til geometrien i de gitte frihetsgradene finner man ved å løse ligning (2.3.2.1) for  $\xi_j$

$$\xi_j = A \sum_{i=1}^3 [-\omega^2 (M_{ij} + a_{ij}) + i\omega b_{ij} + c_{ij}]^{-1} X_i. \quad (2.3.2.6)$$

Hvis geometriene er symmetrisk om  $x = 0$  og  $y = 0$ , er det ingen krysskoblingseffekt i hiv. Når man løser ligningsettet for bevegelsen (se ligning (2.3.2.6)) får man følgende ligning for hiv

RAO ("Respons Amplitude Operator")

$$\frac{\xi_2}{A} = \frac{X_2}{[-\omega^2(M_{22} + a_{22}) + i\omega b_{22} + c_{22}]}. \quad (2.3.2.7)$$

Den tydeligste effekten til RAO skjer når  $-\omega^2(M_{22} + a_{22}) + c_{22} = 0$ . Dette gir den naturlige frekvensen

$$\omega_n = \sqrt{\frac{c_{22}}{M_{22} + a_{22}}}. \quad (2.3.2.8)$$

Ved å sette den gjennopprettende kraften til  $c_{22} = 2\rho g B$ , og massen til  $M_{22} = 2\rho B T$ , kan  $\omega_n$  skrives som

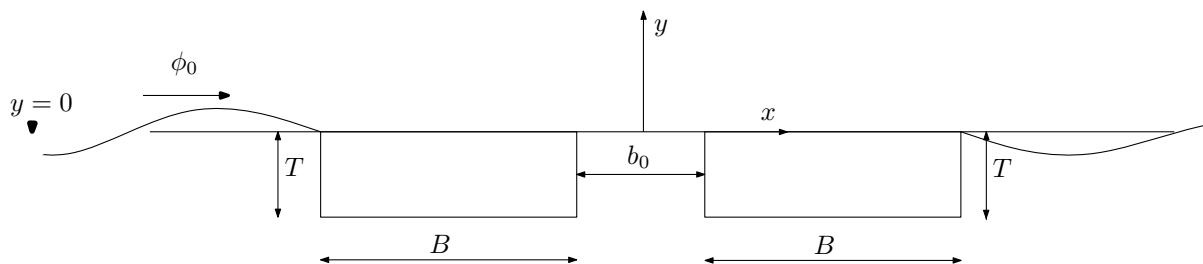
$$\omega_n = \sqrt{\frac{2\rho g B}{2\rho B T + a_{22}}}. \quad (2.3.2.9)$$

Lar man bredden  $B$  være konstant, men varierer på dypgangen  $T$  til geometriene, kan man se at  $\omega_n$  vil forskyves mot lavere frekvenser når dypgangen øker, og mot høyere frekvenser når dypgangen blir mindre. Den er også avhengig av den adderte massen, noe som gjør problemet litt mer komplekst. En eksplisitt formel for den naturlige frekvensen i hiv for dypt vann er gitt av Molin [12].

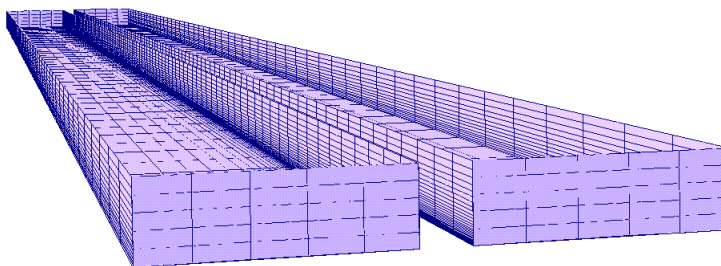
## 2.4 Lineære beregninger

Lineære beregninger av krefter, bevegelse og bølgeheving i spalten er utført i program utviklet av forfatter og i Sesam<sup>TM</sup> HydroD. Sesam<sup>TM</sup> HydroD er en kommersiell programvare utviklet av DNV-GL.

Det er betraktet to geometrier som er koblet og adskilt med en liten spalteåpning  $b_0$ . Geometriene får respondere fritt til den innkommende bølgen, og de er symmetriske om  $y = 0$  og  $x = 0$ . Det er kun betraktet sidesjø i 3-D. Fra symetri vil det da ikke oppstå noen krysskoblingseffekter bortsett fra mellom svai og rull. Geometriene for 2-D beregningene er vist i figur (2.4.0.1). Her er  $B/T = 3.3$  og  $b_0/T = 0.67$ . Geometriene for 3-D beregningene er vist i figur (2.4.0.2). Denne geometrien har samme forhold mellom  $B/T$  og  $b_0/T$ , men lengden til geometriene er satt til  $L = 66$  slik at det kan betraktes som et 2-D problem.



Figur 2.4.0.1: Skisse av 2-D problemet.  $T$  er dypgang,  $B$  er bredde og  $b_0$  er spalteåpning



L

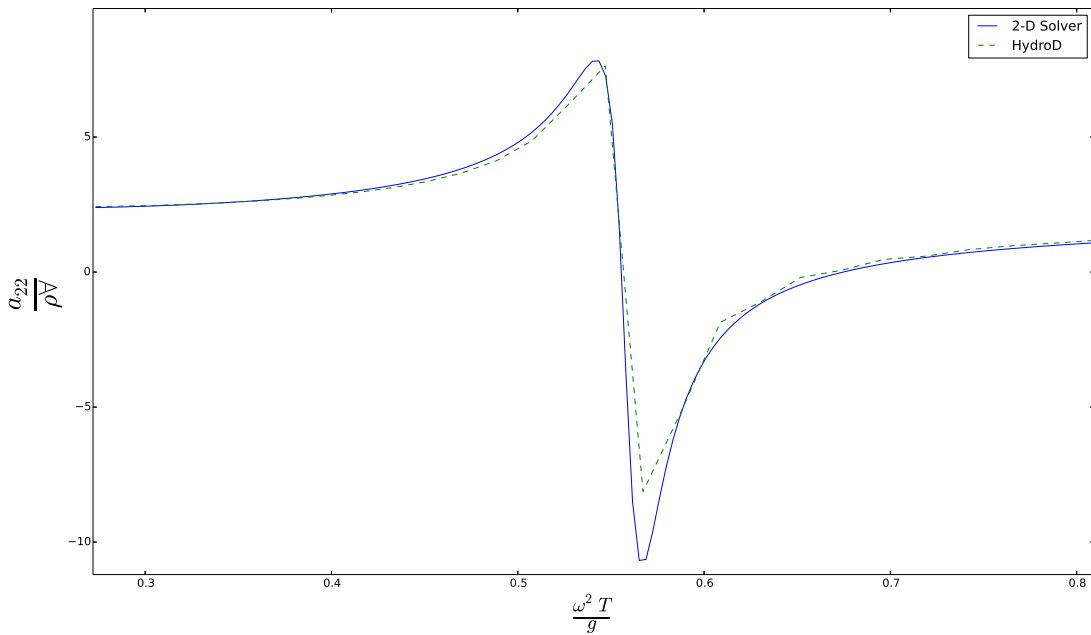
Figur 2.4.0.2: 3-D geometri laget i HydroD



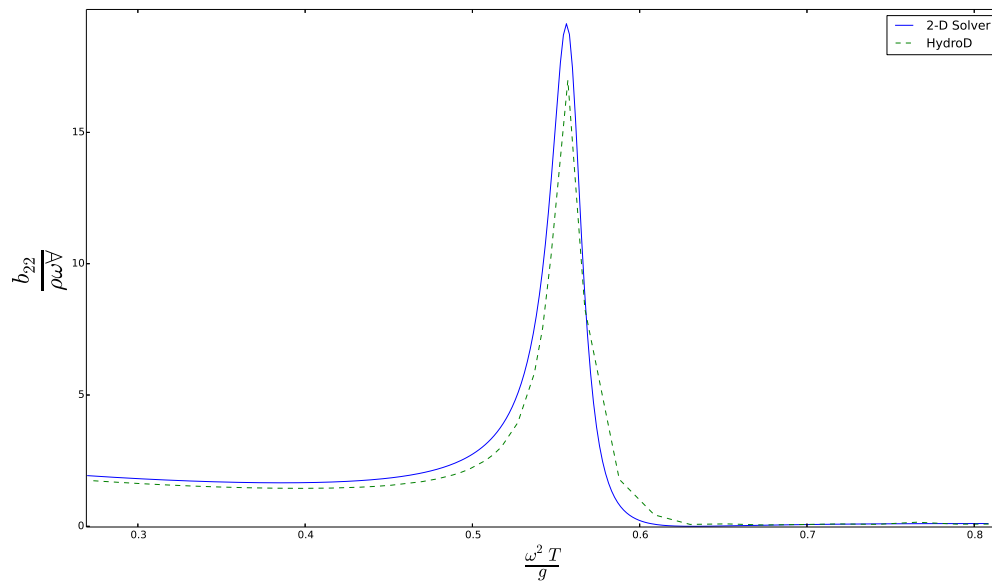
I 2-D beregningene er hver geometrien diskretisert med  $N = 144$  paneler, og det er anvendt ”cosinus spacing” for å øke tettheten av paneler mot de skarpe hjørnene. I 3-D beregningene er det diskretisert med 4734 noder og 4450 paneler. Det er også diskretisert tettere mot de skarpe hjørnene som er rettet inn i spalten.

### 2.4.1 Kreftene i hiv

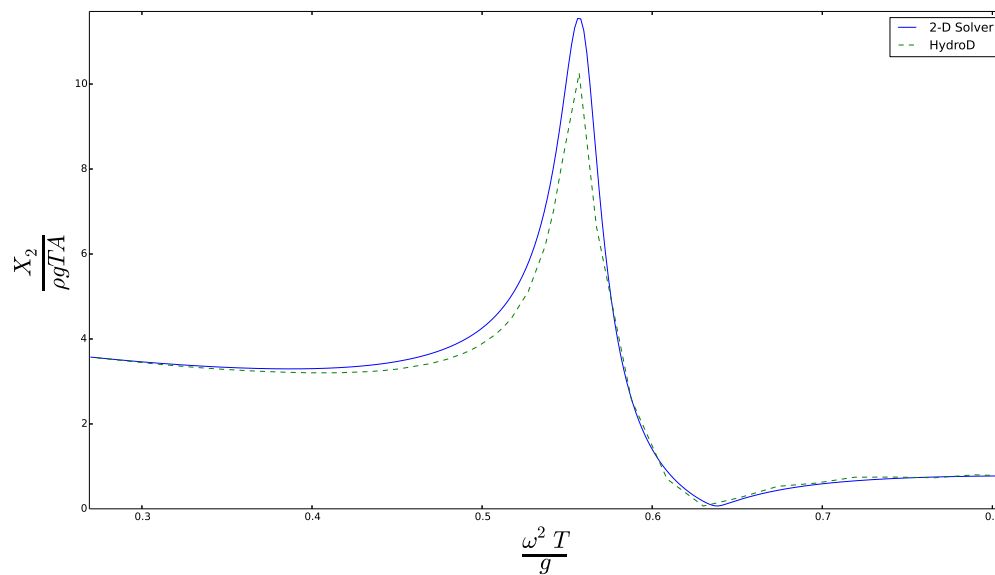
Figur (2.4.1.1) viser den adderte massen. Man kan se at det er god overenstemmelse mellom beregningene utført i programet som er designet av forfatter, og HydroD. Dempningen vist i figur (2.4.1.2) viser også god overenstemmelse mellom de to programmene, men 3-D beregningene ser ut til å gi mindre verdier rundt  $\omega^2 T/g \simeq 0.56$ . Eksitasjonskraften vist i figur (2.4.1.3) har samme oppførsel som dempningen, og dette er forventet siden det finnes en direktekobling mellom de to. Noe som kan bemerkes er at den adderte massen skifter fortegn rundt  $\omega^2 T/g \simeq 0.56$ , og dette er på samme sted som dempningen har toppunkt.



Figur 2.4.1.1: Addert masse i hiv. 2-D Solver beregning er fra forfatters program, mens HydroD resultatene er beregnet i programvaren Sesam<sup>TM</sup> HydroD. 2-D Solver beregning er vist med heltrukket linje, mens HydroD resultatene er vist med stiplet linje



Figur 2.4.1.2: Dempningskraft i hiv. 2-D Solver beregning er fra forfatters program, mens HydroD resultatene er beregnet i programvaren Sesam<sup>TM</sup> HydroD. 2-D Solver beregning er vist med heltrukket linje, mens HydroD resultatene er vist med stiplet linje

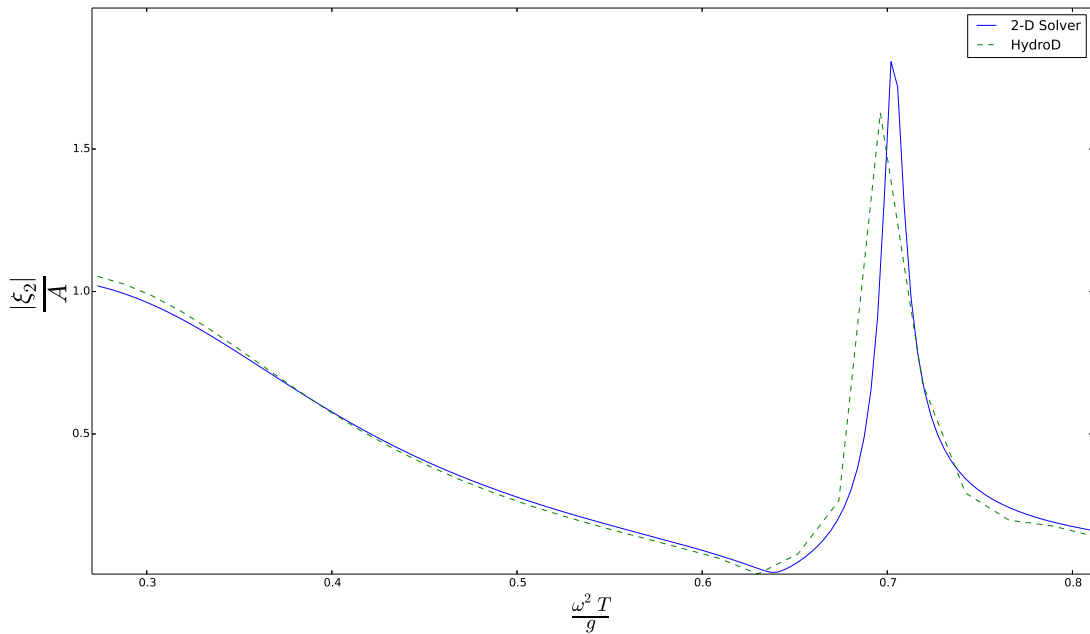


Figur 2.4.1.3: Eksitasjonskraft i hiv. 2-D Solver beregning er fra forfatters program, mens HydroD resultatene er beregnet i programvaren Sesam<sup>TM</sup> HydroD. 2-D Solver beregning er vist med heltrukket linje, mens HydroD resultatene er vist med stiplet linje

### 2.4.2 ”Respons amplitude operator” i hiv

RAO er beregnet ved å løse ligning (2.3.2.7). Man ser at hiv RAO får et toppunkt i området  $\omega^2 T/g \simeq 0.7$ . Dette kalles for resonansfrekvensen til geometrien. Fra figur (2.4.1.1, 2.4.1.2) husker man at dempningen har toppunkt, og addert masse skifter fortegn i området  $\omega^2 T/g \simeq 0.56$ . Dette området kalles for resonansfrekvensen til spalten. Det er viktig å skille disse resonansfrekvensene fra hverandre.

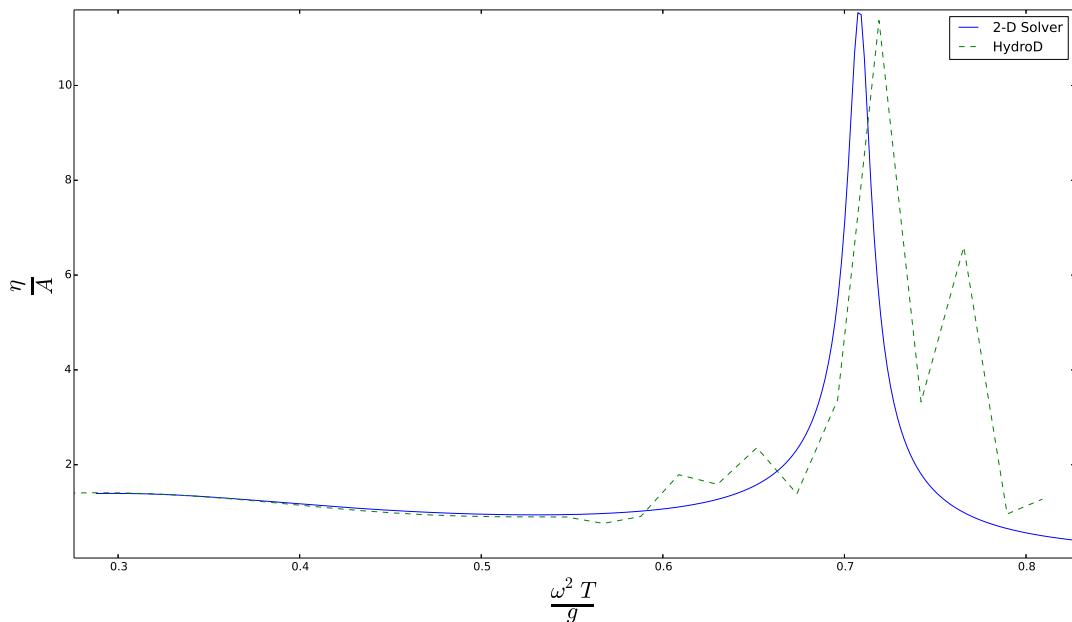
Figur (2.4.2.1) viser god overenstemmelse mellom forfatters beregninger og HydroD, men RAO beregnet i HydroD har en mindre verdi rundt resonansfrekvensen til geometrien.



Figur 2.4.2.1: RAO i hiv. 2-D Solver beregning er fra forfatters program, mens HydroD resultatene er beregnet i programvaren Sesam<sup>TM</sup> HydroD. 2-D Solver beregning er vist med heltrukket linje, mens HydroD resultatene er vist med stiplet linje

### 2.4.3 Bølgehevning

Figur (2.4.3.1) viser responsamplituden til bølgen i spalteåpningen hvor beregningspunktet er  $\vec{x} = (0, 0)$ . Her ser man at det blir stor bølgehevning rundt resonansfrekvensen til geometrien, mens i området hvor den adderte massen skifter fortegn og dempningen er størst, får man et kanselleringsområde. Dette fenomenet blir forklart mer i detalj senere i oppgaven. Resultatene fra 2-D beregningen avviker en del fra 3-D beregningen for noen frekvenser. Ved en nærmere undersøkelse av dette, har det blitt bemerkt at 3-D beregningen får bidrag fra andre bevegelser enn svai, hiv, rull og krysskoblingen mellom svai og rull. Dette kan skyldes at det er en liten feil i geometrien.



Figur 2.4.3.1: Bølgehevning hvor geometrien får lov til å responere i alle frihetsgrader

# Kapittel 3

## Ikke-lineære effekter

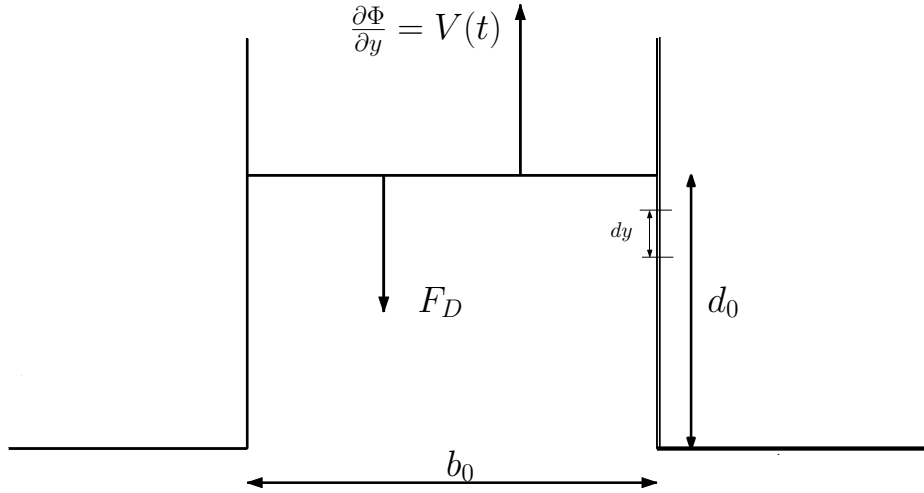
Fra de lineære beregningene vist i seksjon (2.4) ser man at bølgehevingen blir stor. Både Molin et al. [13] og Xu et al. [17] bekrefter at vanlige lineær ”sea-keeping” programmer overpredikerer overflatehevingen i spalteåpningen når de sammenligner med eksperimentelle målinger. Det er ikke sagt at de eksperimentelle resultatene gir lave verdier for bølgeheving, men at de lineære beregningene gir altfor store.

I dette kapitlet er det forsøkt å utlede to forskjellige metoder som kan bidra til å dempe overflatehevingen. Den første er en viskøs effekt i form av et kvadratisk ledd som representerer friksjon fra geometri. Den andre er grunnnet effekt fra endelig utslag. Disse metodene blir analysert hver for seg, for så å bli kombinert.

Det vil bli vist resultater fra beregnede krefter og bølgeheving i spalten for tre forskjellige situasjoner. I den første situasjonen er det ingen innkommende bølge, og geometriene blir tvunget til å svinge med en gitt amplitude. I den andre situasjonen er det innkommende bølger, og geometrien er fastholdt slik at den ikke beveger seg. Den siste situasjonen beskriver en innkommende bølge mot geometriene, og geometriene får respondere fritt. Alle beregninger av bølgehevingen i spalten er fra midtpunktet mellom geometriene, og geometriene som er brukt i utregningene har samme størrelser som i seksjon (2.4).

### 3.1 Heft

Det er betraktet to identiske rektangulære geometrier plassert ved siden av hverandre med en liten spalteåpning  $b_0$ . Det blir antatt at væskebevegelsen ikke varierer over spalten slik at den vertikal hastigheten kan beskrives som  $V(t) = V_0 \cos(\omega t + \delta)$ , hvor  $\delta$  er her gitt som fasen. Skissering av problemet er vist i figur (3.1.0.1).



Figur 3.1.0.1: Skissering av spalte

#### 3.1.1 Matematisk formulering

Når væsken i spalten oscillerer i vertikalretning vil det oppstå friksjonskraft fra vegg til væske. Denne kraften er gitt ved

$$dF_D = -0.5\rho C_F(Re)V(t)|V(t)|dy. \quad (3.1.1.1)$$

Ved å integrerer ligning (3.1.1.1) på sideveggen til den ene geometrien, får man følgende uttrykk

$$F_D = \int_{-d_0}^0 -0.5\rho C_F(Re)V(t)|V(t)|dy = -0.5\rho C_F(Re)V(t)|V(t)|d_0. \quad (3.1.1.2)$$

Siden det er to geometrier som er identiske, kan denne kraften ganges med faktor to.  $d_0$  er her gitt som lengden hvor friksjonskraften virker og denne kan sees i figur (3.1.0.1). Ved antagelsen

om ingen variasjon på tvers av spalten kan kraften representeres med

$$p_0 = -F_D/b_0 = \rho C_F(Re)V(t)|V(t)|\frac{d_0}{b_0}, \quad (3.1.1.3)$$

noe som gjør at kraften fra friksjon kommer inn i betingelsene på overflaten.

Uttrykket for kraften som virker i spalten lineariseres så ved hjelp av ekvivalent linearisering, hvor ideen er å finne variabel  $\kappa$  som gjør at arbeidet gjort over en periode er lik  $\kappa V(t)$ . Dette medfører at  $V(t) \cdot |V(t)|$  kan skrives som  $\frac{8}{3\pi}|V_0|V(t)$ . Denne utregningen er vist tillegg (D.1).

Bruker man dette resultatet kan trykket skrives som

$$p_0 = \frac{8}{3\pi}\rho C_F(Re)|V_0|\frac{d_0}{b_0}V(t). \quad (3.1.1.4)$$

Ved å derivere Bernoulli's trykklikning (2.3.1.1) med hensyn på tid og deretter linearisere om  $y = 0$ , får man følgende relasjon for trykket

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial t} = C_F(Re) \frac{8}{3\pi} V_0 \frac{dV(t)}{dt} \frac{d_0}{b_0}. \quad (3.1.1.5)$$

Hastigheten  $V(t)$  er relatert til hastighetspotensialet ved  $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = V(t)$ , dermed kan man bruke potensialet definert i ligning (2.1.0.1).  $V(t)$  kan dermed skrives slik

$$V(t) = \Re\left\{\left|\frac{\partial \phi}{\partial y}\right| e^{i\omega t + i\delta}\right\} = V_0 \cos(\omega t + \delta). \quad (3.1.1.6)$$

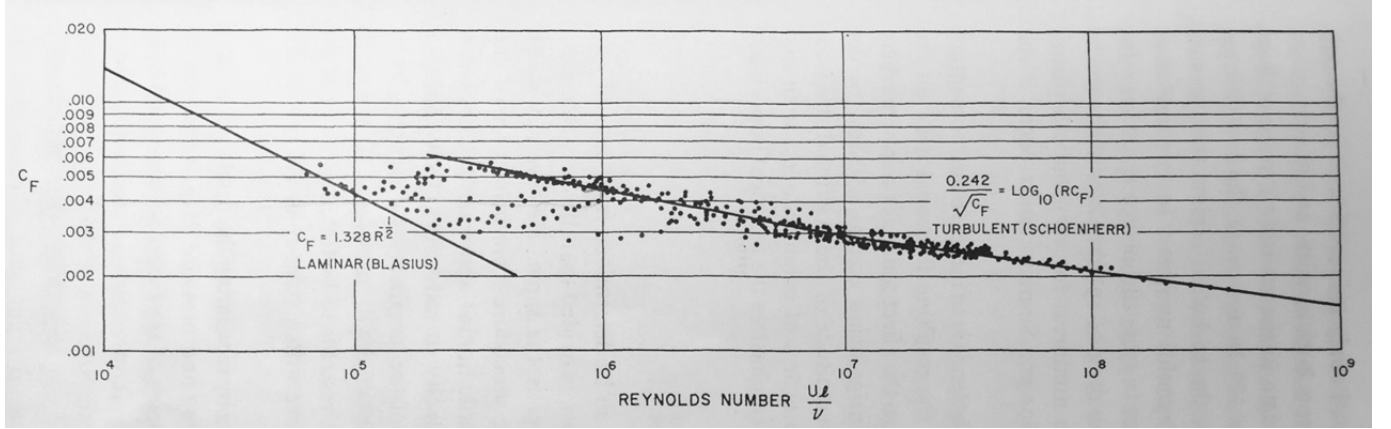
Dette gir følgende betingelse for potensialet i spalteåpningen

$$\Re\left\{(-\omega^2 \phi + g \frac{\partial \phi}{\partial y} + i\omega \alpha \left|\frac{\partial \phi}{\partial y}\right| e^{i\delta}) e^{i\omega t}\right\} = 0 \text{ på } S_p, \quad (3.1.1.7)$$

hvor  $\alpha$  er

$$\alpha = C_F(Re) \frac{8}{3\pi} |V_0| \frac{d_0}{b_0}. \quad (3.1.1.8)$$

I  $\alpha$  inngår det to parametere som må bestemmes,  $C_F(Re)$  og  $d_0$ .  $C_F(Re)$  kan bestemmes ved å bruke verdier gitt fra figur (3.1.1.1). Denne verdien vil variere med hastigheten, men er satt til å være 0.005 i denne analysen. Det hadde her vært mulig å bruke en modell for laminært grensesjikt til å beregne  $C_F$ .



Figur 3.1.1.1: Schoenherr's flat-plate frictional drag coefficient. Denne figuren er hentet fra Newman [14]. Aktuelle verdier ligger i området 0.004-0.01, se Marthinsen and Vinje [10]

$d_0$  bestemmes av det området hvor friksjonskraften virker. Det kan virke fornuftig å la kraften virke på hele det våte arealet til geometriene i spalten slik at  $d_0$  kan skrives som

$$d_0 = T. \quad (3.1.1.9)$$

### 3.1.2 Integralligning for heft

Nå er det et tilleggsledd i betingelsen på den frie overflaten i spalteåpningen, og dette vil gi opphav til et ekstra ledd i integralligningen. Anvender man Greens teorem (se appendiks A.1 for utledning) får man følgende integralligning for hastighetspotensialet

$$\pi\phi = \iint_{S_w} \phi(\vec{a}) \frac{\partial G(\vec{a}, \vec{x})}{\partial n} dS - \iint_{S_w} G(\vec{a}, \vec{x}) \frac{\partial \phi}{\partial n} dS + \iint_{S_p} \phi(\vec{a}) \frac{\partial G(\vec{a}, \vec{x})}{\partial n} dS - \iint_{S_p} G(\vec{a}, \vec{x}) \frac{\partial \phi}{\partial n} dS. \quad (3.1.2.1)$$

$S_w$  er det våte arealet til geometriene (se figur 2.1.0.1) og  $S_p$  er overflaten i spalten. Den normalderivate i spalten på  $y = 0$  er gitt som

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad y = 0. \quad (3.1.2.2)$$

Dette gjør at integralet over  $S_p$  kan skrives som

$$\iint_{S_p} \phi(\vec{a}) \frac{\partial G(\vec{a}, \vec{x})}{\partial y} dS - \iint_{S_p} G(\vec{a}, \vec{x}) \frac{\partial \phi}{\partial y} dS. \quad (3.1.2.3)$$



Ved å bruke at den normalderiverte av Greenfunksjonen  $G(\vec{a}, \vec{x})$  gitt fra ligning (2.2.1.7) på  $y = 0$  er  $\frac{\partial G(\vec{a}, \vec{x})}{\partial y} = \nu G(\vec{a}, \vec{x})$ , og i tillegg bruke ligning (3.1.1.7) til å uttrykke  $\frac{\partial \phi}{\partial y}$  som

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \nu \phi - \frac{i\omega\alpha}{g} V_0, \text{ p\aa } S_p, \quad (3.1.2.4)$$

blir integralet over  $S_p$

$$\iint_{S_p} \phi(\vec{a}) \nu G(\vec{a}, \vec{x}) dS - \iint_{S_p} G(\vec{a}, \vec{x}) \left( \nu \phi - \frac{i\omega\alpha}{g} V_0 \right) dS. \quad (3.1.2.5)$$

Dermed får man følgende integralligning for potensialet på randen

$$\pi \phi = \iint_{S_w} \phi(\vec{a}) \frac{\partial G(\vec{a}, \vec{x})}{\partial n} dS - \iint_{S_w} G(\vec{a}, \vec{x}) \frac{\partial \phi}{\partial n} dS + \iint_{S_p} G(\vec{a}, \vec{x}) \frac{i\omega\alpha}{g} V_0 dS. \quad (3.1.2.6)$$

For å løse denne integralligningen skriver vi potensialet  $\phi$  på følgende form

$$\phi = \phi^{(0)} + \phi^{(1)}, \quad (3.1.2.7)$$

hvor løsningen av  $\phi^{(0)}$  finnes fra det lineære tilfellet gitt ved ligning (2.2.1.1, 2.2.1.2, 2.2.1.3, 2.2.1.4) og  $\phi^{(1)}$  er korreksjonspotensialet.

Når det lineære feltpotensialet er funnet i spalten, kan potensialet finnes ved å løse

$$\pi(\phi^{(0)} + \phi^{(1)}) = \iint_{S_w} (\phi^{(0)} + \phi^{(1)}) \frac{\partial G(\vec{a}, \vec{x})}{\partial n} dS - \iint_{S_w} G(\vec{a}, \vec{x}) \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial n} dS + \frac{i\omega\alpha}{g} V_0 \iint_{S_p} G(\vec{a}, \vec{x}) dS. \quad (3.1.2.8)$$

Her er det brukt at den normalderiverte til  $\phi^{(1)}$  på randa  $S_w$  er null

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial n} = 0, \quad (3.1.2.9)$$

og  $V_0$  er vertikalhastigheten beregnet fra det lineære potensialet.

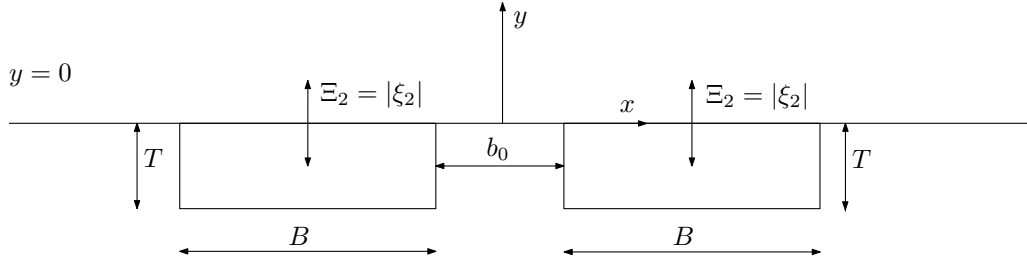
Feltpotensialet i spalten finnes så ved

$$2\pi(\phi^{(0)} + \phi^{(1)}) = \iint_{S_w} (\phi^{(0)} + \phi^{(1)}) \frac{\partial G(\vec{a}, \vec{x})}{\partial n} dS - \iint_{S_w} G(\vec{a}, \vec{x}) \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial n} dS + \frac{i\omega\alpha}{g} V_0 \iint_{S_p} G(\vec{a}, \vec{x}) dS. \quad (3.1.2.10)$$

Når potensialet er funnet fra metoden beskrevet ovenfor, beregnes førsteordens bølgelaster fra ligning (2.3.1.8, 2.3.1.4), og bølgehevning fra ligning (2.1.0.12).

### 3.1.3 Analyse av tvunget bevegelse i hiv

I denne analysen er det ingen innkommende bølge og geometrien blir tvunget til å svinge med en reell amplitude  $\Xi_2$  i hiv. Skissering av problemet er vist i figur (3.1.3.1).



Figur 3.1.3.1: Skisse av geometrier som beveger seg grunnet tvunget bevegelse med amplitude  $\Xi_2$  i hiv

Potensialet i denne analysen tar følgende form

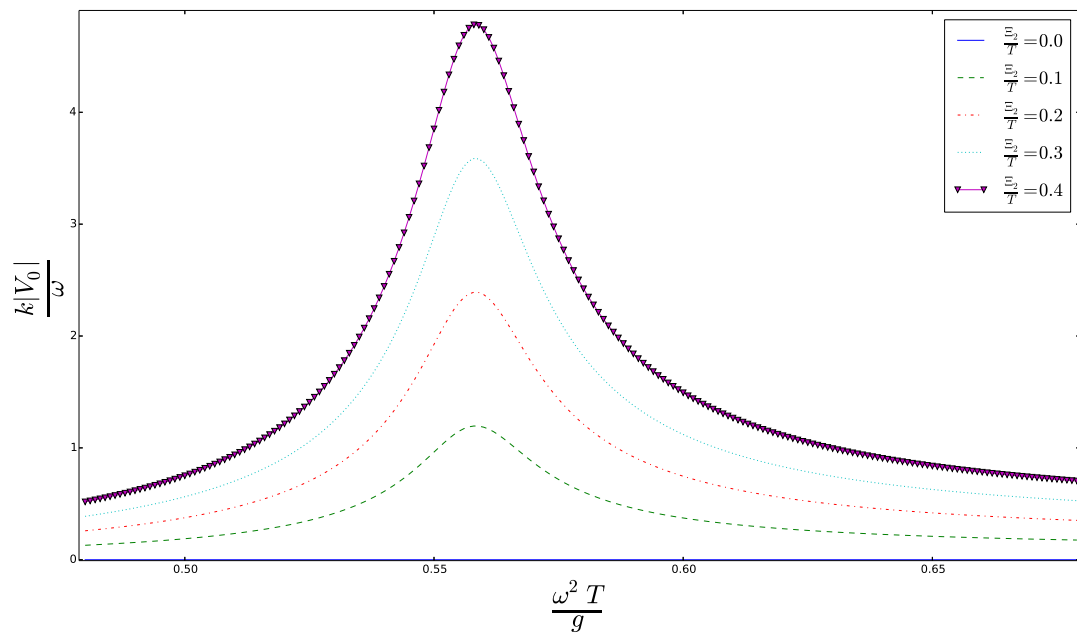
$$\Phi = \Re\{i\omega|\xi_2|\phi_2 e^{i\omega t}\}, \quad (3.1.3.1)$$

dette gir relasjonen mellom  $V_0$  og det lineære potensialet

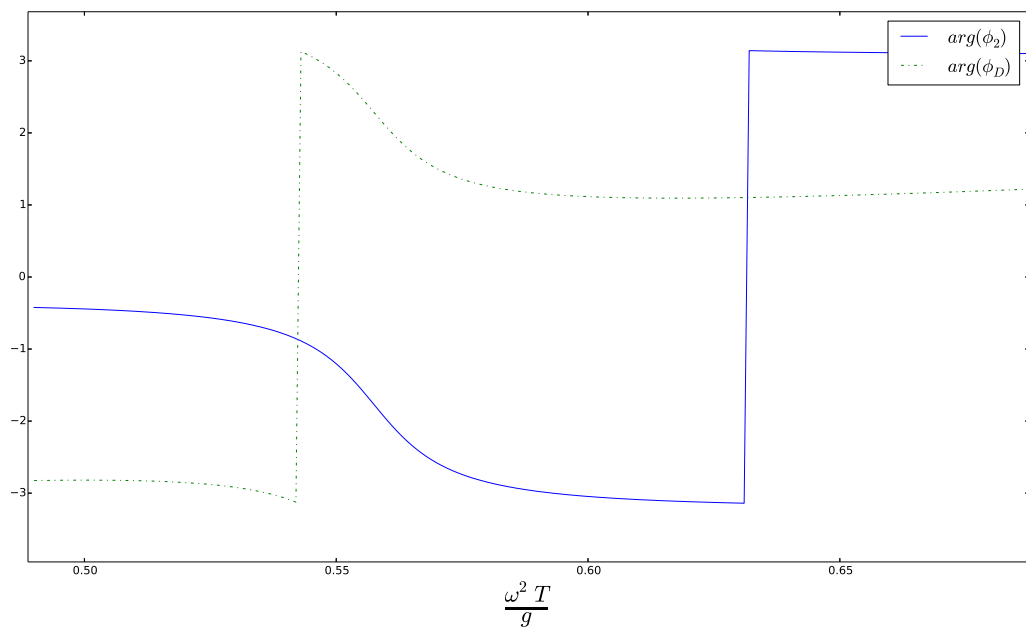
$$\Re\{\omega\Xi_2|\frac{\partial\phi_2^{(0)}}{\partial y}|e^{i\delta}e^{i\omega t}\} = \Re\{V_0e^{i\omega t+i\delta}\}, \quad (3.1.3.2)$$

hvor  $V_0 = \Xi_2 k \omega |\phi_2^{(0)}|$ , og fasen  $\delta = \arg(\phi_2^{(0)}) + \frac{\pi}{2}$ .

Verdiene til  $V_0$  er vist i figur (3.1.3.2), og her ser man at hastigheten øker betraktelig når amplituden  $\Xi_2$  blir større. Fasen  $\delta$  er vist i figur (3.1.3.3).

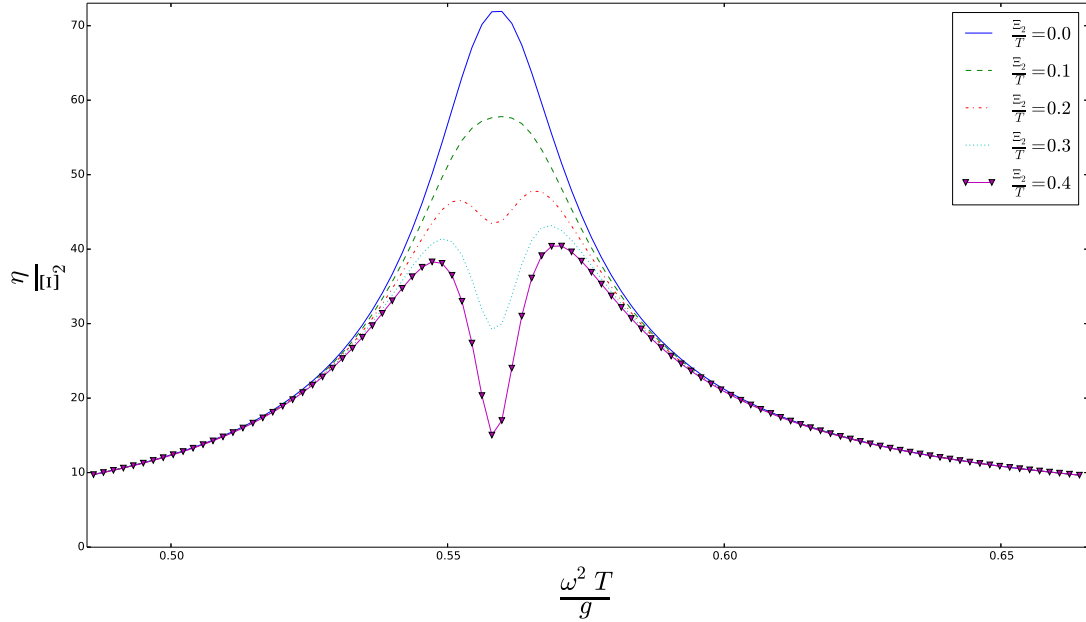


Figur 3.1.3.2: Hastigheten  $V_0$  for forskjellige svingeamplituder



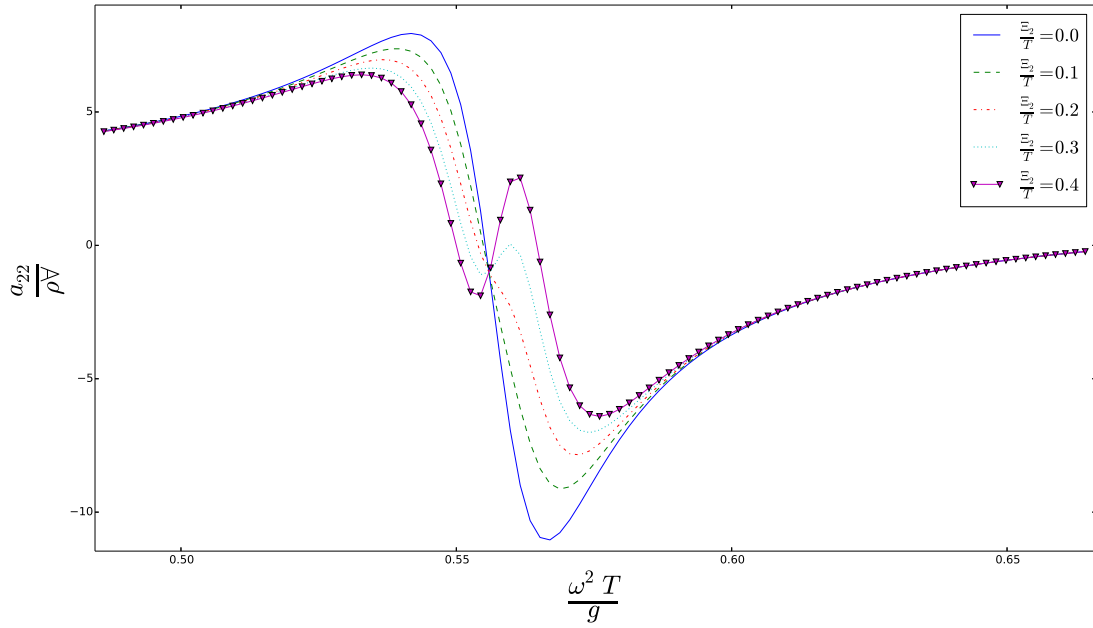
Figur 3.1.3.3: Fasen til  $\phi_2$  vist sammen med fassen til  $\phi_D$

I figur (3.1.3.4) vises radiasjonsbølgen i spalten hvor forholdet mellom den tvungede amplituden og dypgangen er gitt som  $\Xi/T$ .  $\Xi/T = 0$  tilsvarer det lineære tilfellet. I den lineære beregningen kan man se at vi får stor amplitude rundt  $\omega^2 T/g \simeq 0.56$ . Ved å innskrenke spalteåpningen mer, vil  $\eta/\Xi_2$  bli større. Marthinsen and Vinje [10] opplevde i sin analyse av tilsvarende problem, at bølgehevningen i det lineære tilfellet ble  $\eta/\Xi_2 \simeq 200$  i tvunget svaibevegelse. Når forholdet mellom den tvungende amplituden og dypgangen øker, gir dette større vertikal hastighet i spalten, og dette medfører at korreksjonsintegralet over spalten får større påvirkning på løsningen. Dette gir en dempende effekt på bølgen. Når forholdet mellom  $\Xi/T$  blir større eller lik 0.2 blir den dempende effekten betraktelig mer synelig på  $\omega^2 T/g \simeq 0.56$ , enn for frekvenser like ved, dette medfører at bølgehevningen får en karakteristisk fall.



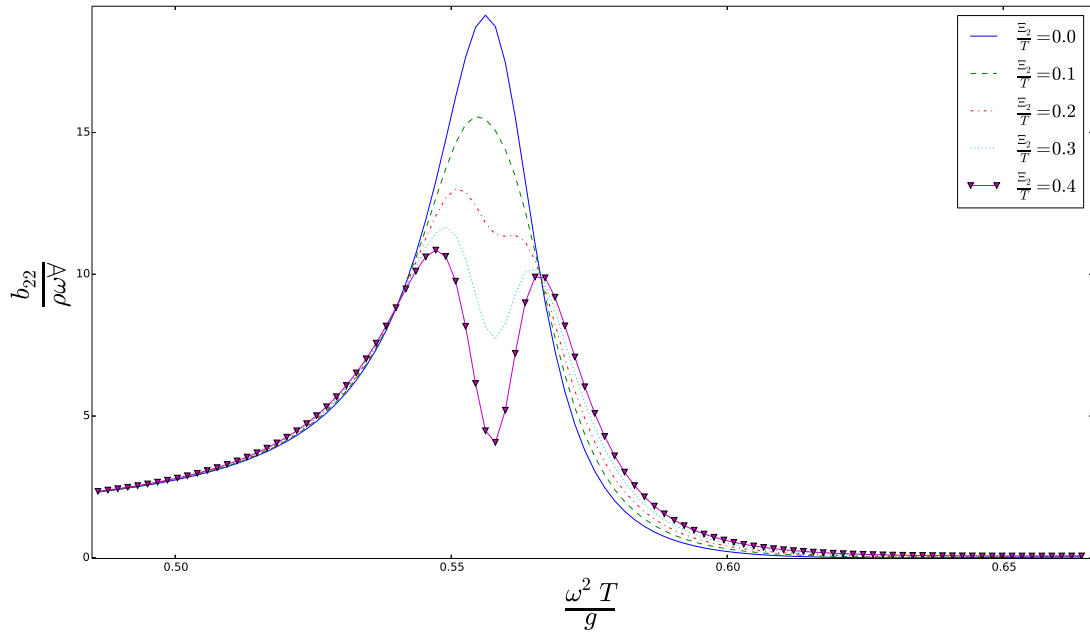
Figur 3.1.3.4: Bølgehevningen plottet for forskjellige svingeamplituder, og  $\Xi/T = 0$  tilsvarer det lineære tilfellet

Figur (3.1.3.5) viser den adderte massen for forskjellige verdier av  $\Xi_2/T$ . Når forholdet mellom den tvungende amplituden og dypgangen øker, dempes den adderte massen for de fleste frekvenser. Det oppstår en komplisert effekt i området  $\omega^2 T/g = 0.56$  hvor det blir et kryssningspunkt som alle beregningene ser ut til å passere gjennom. Dette er det området hvor den lineære beregningen skifter fortegn.



Figur 3.1.3.5: Addert masse for forskjellige verdier av forholdet mellom den tvungende amplituden  $\Xi_2$  og dypgangen  $T$ .  $\Xi_2/T = 0.0$  tilsvarer det lineære tilfellet

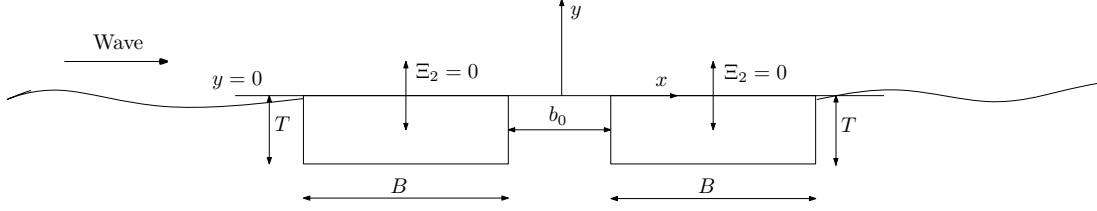
Dempningskoeffisienten vist i figur (3.1.3.5) opplever noe av den samme oppførselen som bølgehevningen. Når forholdet mellom den tvungende amplituden og dypgangen øker, blir koeffisienten betraktelig mindre i området  $\omega^2 T/g \in [0.54, 0.57]$ . I området  $\omega^2 T/g \in [0.5, 0.54]$  og  $\omega^2 T/g \in [0.57, 0.64]$  får man derimot en liten økning.



Figur 3.1.3.6: Dempningskoeffisienten for varierende forhold mellom den tvungende amplituden og dypgangen.  $\Xi_2/T = 0.0$  tilsvare det lineære tilfellet

### 3.1.4 Analyse av fastholdt geometri

I denne analysen er det en innkommende bølge mot geometriene, og geometriene er fastholdt slik at de ikke responderer på bølgen. Dette er skissert i figur (3.1.4.1).



Figur 3.1.4.1: Skisse av innkommende bølge mot fastholdt geometri

Potensialet i denne analysen tar følgende form

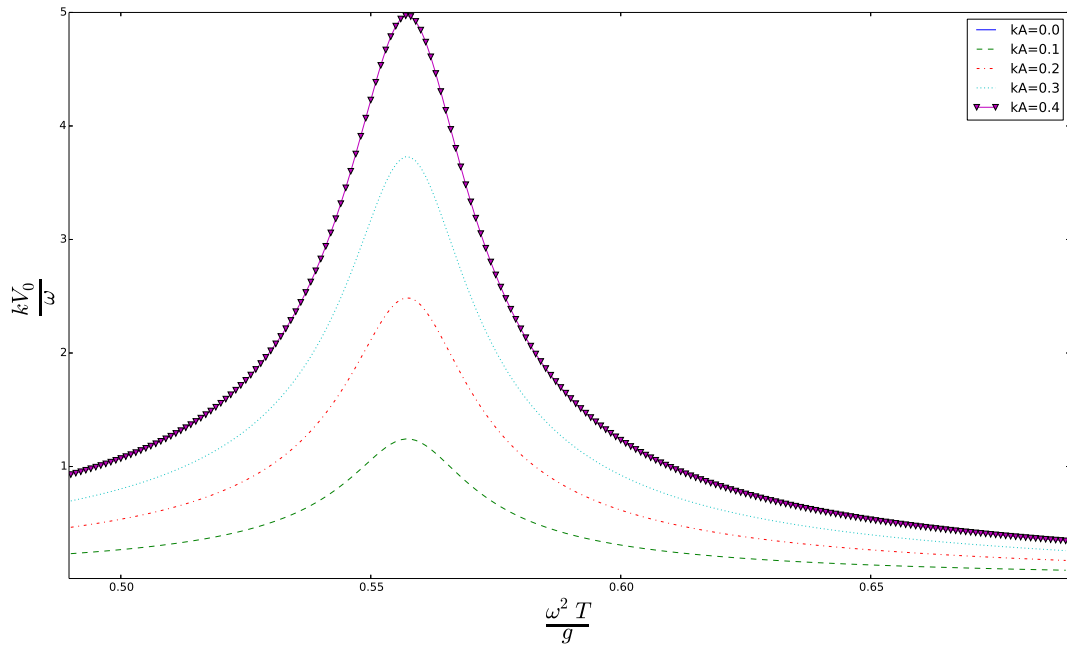
$$\Phi = \Re\{A\phi_D e^{i\omega t}\}, \quad (3.1.4.1)$$

som gir relasjonen mellom  $V_0$  og det lineære potensialet

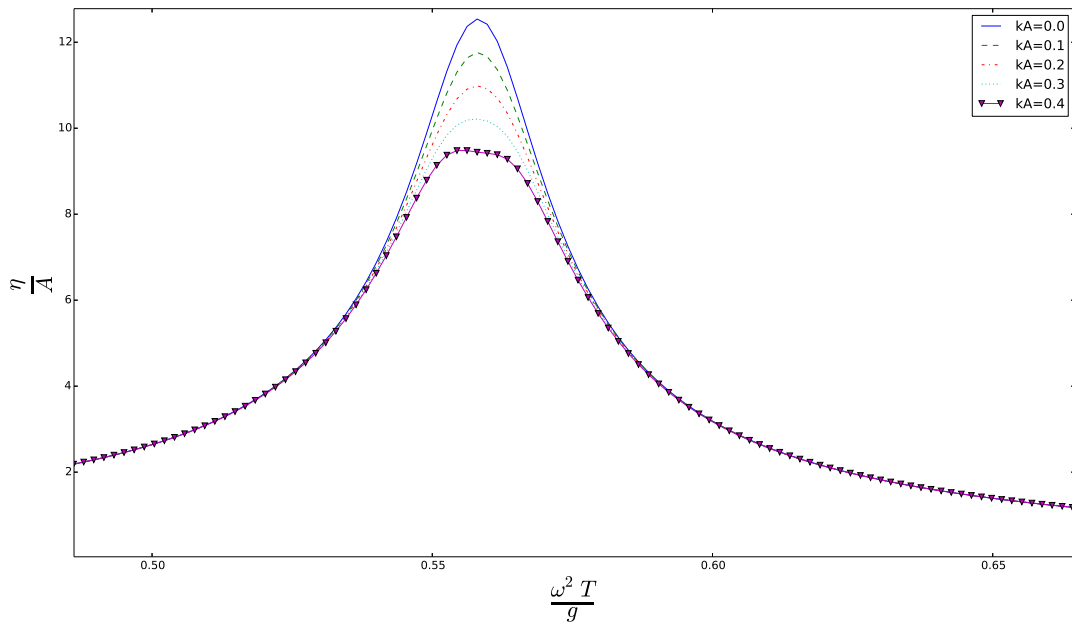
$$\Re\{A|\frac{\partial\phi_D^{(0)}}{\partial y}|e^{i\delta}e^{i\omega t}\} = \Re\{V_0 e^{i\omega t+i\delta}\}. \quad (3.1.4.2)$$

$V_0 = A|\frac{\partial\phi_D}{\partial y}|$ , og fasen  $\delta = \arg(\phi_D) + \frac{\pi}{2}$ . Verdiene til den vertikale hastigheten er vist i figur (3.1.4.2). Og fasen er vist sammen med fasen til radiasjonspotensialet i figur (3.1.3.3). Det er greit å merke seg at det ikke er stor forskjell mellom hastigheten beregnet fra diffraksjon- og radiasjonspotensialet (vist i figur (3.1.3.2)).

Figur (3.1.4.3) viser bølgehevingen i spalten for forskjellige bølgesteillheter. Man kan tydelig se at spredningspotensialet opplever en resonant effekt i området  $\omega^2 T/g \simeq 0.56$  slik at bølgehevingen blir stor. Dette er det samme området hvor radiasjonsproblemet opplever resonans. Ved økende bølgeamplitude  $A$  blir effekten fra korreksjonen mer signifikant, og dette bidrar til å dempe bølgen i spalten. Selv om forholdet mellom bølgesteillheten er den samme som forholdet  $\Xi_2/T$  i underseksjon (3.1.3), gis det ikke like stor innvirkning på bølgehevingen som vist i figur (3.1.3.4).



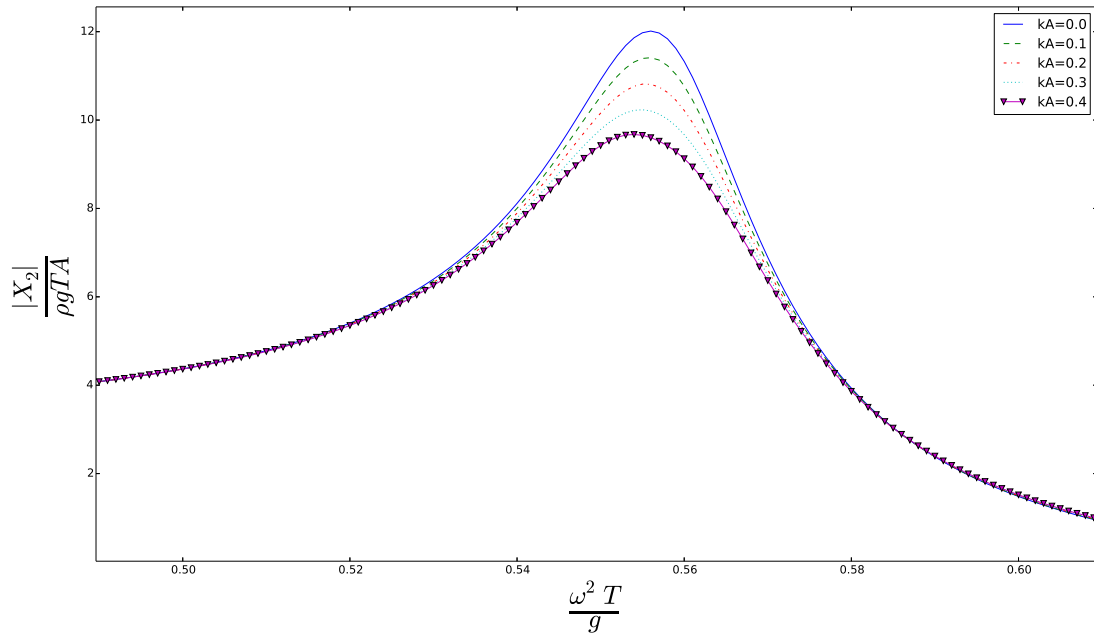
Figur 3.1.4.2: Den vertikale hastigheten i spalten. Når  $kA = 0.0$  er amplituden veldig liten, og dermed blir det ingen stor hastighet



Figur 3.1.4.3: Bølgehevingen fra diffraksjonspotensialet er plottet for forskjellige bølgesteillheter.  $kA = 0$  viser til den lineære beregningen. Når den innkommende bølgeamplituden øker, dempes spredningsbølgen i spalten



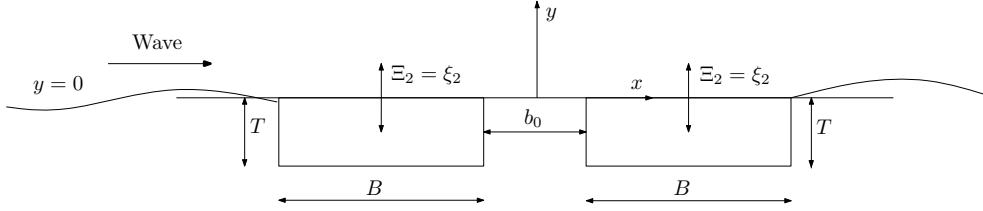
Eksitasjonskraften i hiv er vist i figur (3.1.4.4). Her dempes eksitasjonskraften for alle frekvenser når  $kA > 0.0$ . I radiasjonsproblemet så vi at dempningskoeffisienten viste tendens til å gi større verdier i forhold til den lineære løsningen for noen frekvenser. Dette ser vi ikke i eksitasjonskraften.



Figur 3.1.4.4: Eksitasjonskraft i hiv.  $kA = 0.0$  viser til den lineære beregningen

### 3.1.5 Analyse av frittflytende geometri i et innkommende bølgefelt

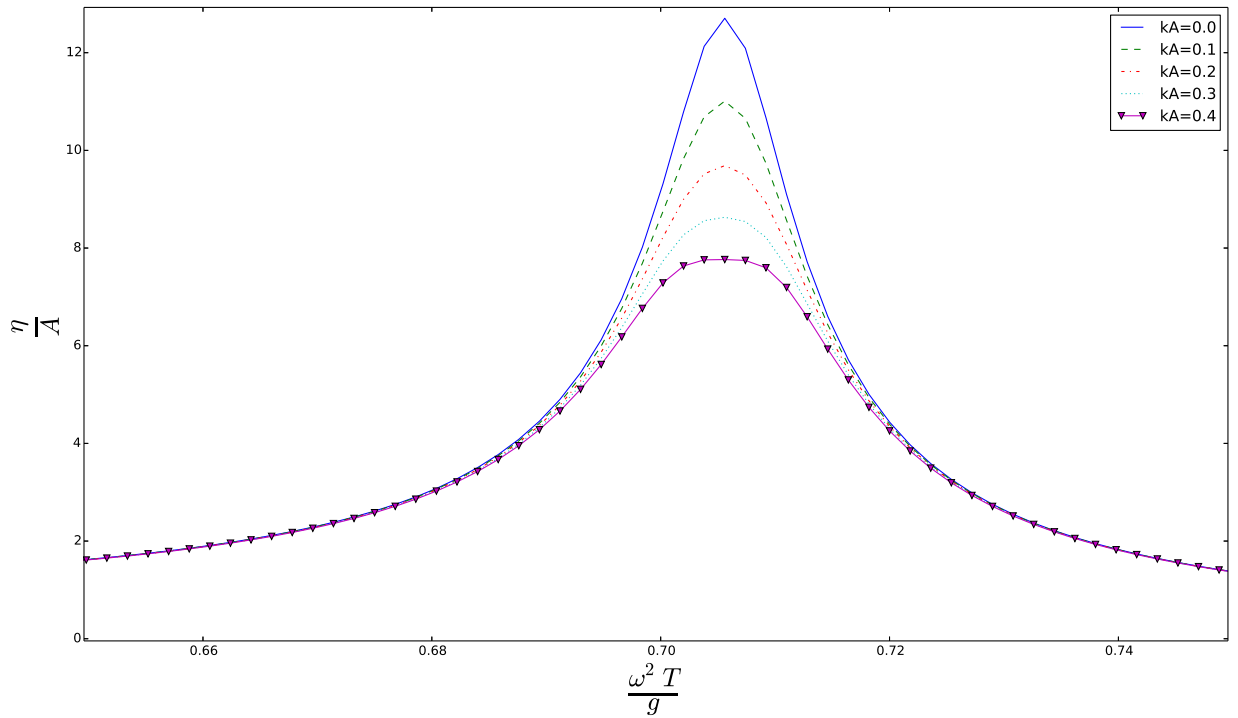
Setter man sammen tilfellene fra underseksjon 3.1.3 og 3.1.4 får man at geometriene responderer på den innkommende bølgen. Responsamplituden  $\xi_2$  finnes nå ved å løse bevegelsesligningen gitt ved (2.3.2.6). Skissering av problemet er vist i figur (3.1.5.1).



Figur 3.1.5.1: Skissering av geometrier som får respondere til innkommende bølge

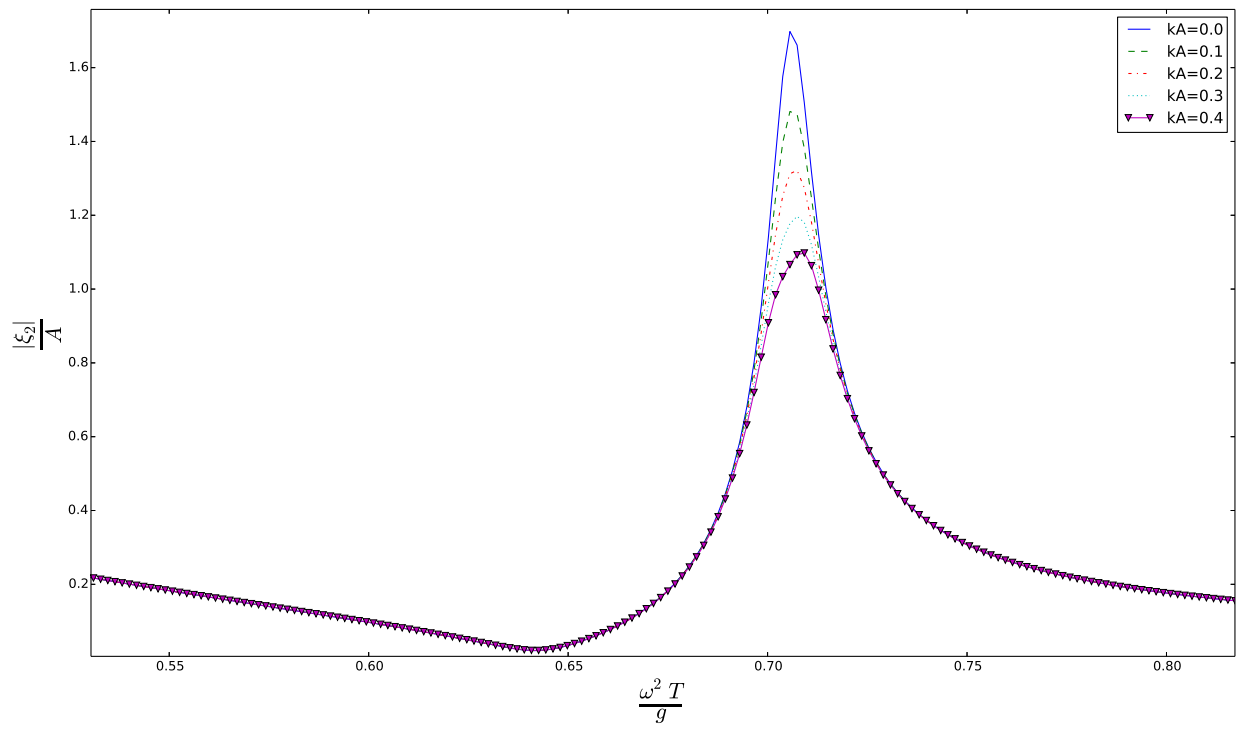
Bølgehevingen i spalten er vist i figur (3.1.5.2). Denne bølgen får størst amplitude i området rundt  $\omega^2 T/g \simeq 0.7$ . I underseksjon (3.1.3 og 3.1.4) er den største bølgehevingen i området  $\omega^2 T/g \simeq 0.56$ , og denne effekten skyldes resonansen til væsken i spalten. Den nye resonans-effekten skyldes nå responsen til geometrien. McIver [11] har undersøkt hvorfor bølgen får en annen resonansfrekvens når geometriene får respondere fritt, i forhold til når den er fastholdt eller blir tvunget til å bevege seg. Han viser også at bølgen fra radiasjonsproblemet og diffraksjonsproblemet nesten kansellerer hverandre i området  $\omega^2 T/g \simeq 0.56$  når geometriene får respondere til den innkommende bølgen i det lineære tilfellet. Bølgehevingen i dette problemet har også tilsvarende kansellering for samme frekvens, men det blir ikke fokusert mer på denne oppførselen.

Bølgehevingen beregnet for frittflytende geometri i et innkommende bølgefelt blir tydelig redusert når korreksjonsleddet i integralligningen blir større. Denne får ingen unormaliteter som bølgen vist i underseksjon (3.1.3), men heller en fin og jevn dempende effekt. Det er forventet at man får tilsvarende oppførsel som bølgehevingen i underseksjon (3.1.3) hvis man øker bølgesteillheten betraktelig.



Figur 3.1.5.2: Bølgehevning når geometrien får respondere fritt i et innkommende bølgefelt. Den største bølgeamplituden kommer fra resonansen til geometrien. Man kan tydelig se at bølgehevningen dempes betraktlig når korreksjonsleddet blir større

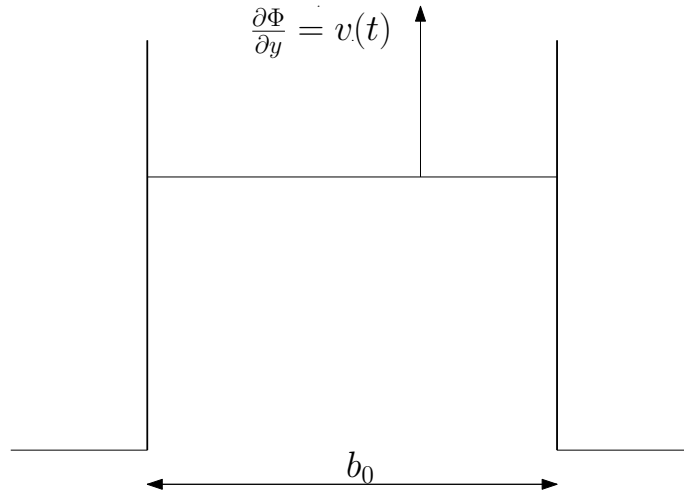
Respons amplitude operatoren (RAO) gitt ved  $|\xi_2|/A$  er vist i figur (3.1.5.3). Her kan man se at geometrien har stor bevegelse i området  $\omega^2 T/g \simeq 0.7$ . Denne store bevegelsen kan man igjen se i figur (3.1.5.2), hvor amplituden til bølgehevningen i spalten blir stor. Dette medfører at bevegelsen til geometriene har lik dempet oppførsel som bølgehevningen i spalten.



Figur 3.1.5.3: Respons amplitude operator (RAO) i hiv. Geometriene har størst bevægelse i området  $\omega^2 T/g \simeq 0.7$

## 3.2 Endelig utslag

I denne analysen er det betraktet to identiske rektangulære geometrier plassert ved siden av hverandre med en liten spalteaåning  $b_0$ . Dette er tilsvarende som i seksjon (3.1). Avstanden  $b_0$  er tilstrekkelig liten slik at væsken beveger seg som en søyle vertikalt uten variasjon over spalten. Potensialet er relatert til hastigheten i spalten ved  $\partial\Phi/\partial y = v(t)$ . Dette er vist i figur (3.2.0.4).



Figur 3.2.0.4: Skisse av spalte mellom geometrier

### 3.2.1 Matematisk formulering

Ved antagelsen at væskens bevegelse ikke varierer over spalten, kan man definere hastigheten til vannsøylen som  $v(t) = \Re\{v_0 e^{i\omega t}\}$  og hevingen som  $\eta = \Re\{\eta_0 e^{i\omega t}\}$ . Dette gjør at hastigheten til vannsøylen relateres til bølgehevingen ved

$$\frac{d\eta}{dt} = v(t). \quad (3.2.1.1)$$

Velger man konstanten  $C$  i Bernoullis ligning (se ligning 2.3.1.1) til å være lik  $p_a/\rho$ , hvor  $p_a$  er det konstante atmosfæriske trykket og bruker at

$$-\frac{1}{\rho}(p - p_a) = 0, \quad (3.2.1.2)$$

får man at den dynamiske betingelsen på  $y = \eta$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + g\eta = 0. \quad (3.2.1.3)$$

Taylor-utvikler man denne betingelsen om  $y = 0$ , gir dette

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{y=0} + \eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial t} \Big|_{y=0} + g\eta \Big|_{y=0} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi \Big|_{y=0} + \mathcal{O}(\Phi^3) = 0. \quad (3.2.1.4)$$

Neglisjerer man ledd av  $\mathcal{O}(\Phi^3)$  og tidsmidler ligning (3.2.1.4)

$$\begin{aligned} g\bar{\eta} \Big|_{y=0} &= \overline{\eta \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \Big|_{y=0} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \Big|_{y=0}} \\ g\bar{\eta} \Big|_{y=0} &= \frac{1}{2} \omega^2 |\eta_0|^2 - \frac{1}{4} \omega^2 |\eta_0|^2, \end{aligned} \quad (3.2.1.5)$$

gir dette følgende uttrykk for den midlere vannstanden i spalten mellom geometriene

$$\bar{\eta} = \frac{k}{4} |\eta_0|^2. \quad (3.2.1.6)$$

Ved å definere  $\eta$  på følgende måte

$$\eta = \bar{\eta} + \Re\{\eta_{1,0} e^{i\omega t}\} = \bar{\eta} + \eta_1, \quad (3.2.1.7)$$

og subsituere dette inn i ligning (3.2.1.4), får man

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{y=0} + (\bar{\eta} + \eta_1) \frac{\partial^2 (\bar{\eta} + \eta_1)}{\partial t^2} \Big|_{y=0} + g(\bar{\eta} + \eta_1) \Big|_{y=0} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial (\bar{\eta} + \eta_1)}{\partial t} \cdot \frac{\partial (\bar{\eta} + \eta_1)}{\partial t} \right) \Big|_{y=0} = 0. \quad (3.2.1.8)$$

Tidsmidler man denne ligningen og observerer at  $\overline{\eta_1 \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial t^2} + g\bar{\eta} + \frac{1}{2} \frac{\partial \eta_1}{\partial t} \cdot \frac{\partial \eta_1}{\partial t}} = 0$ ,

får man ved å samle ledd som har periode  $T_p = 2\pi/\omega$ , følgende uttrykk for den dynamiske betingelse

$$\Re\{(j\omega\phi + (g - \omega^2\bar{\eta})\eta_{1,0})e^{i\omega t}\} = 0. \quad (3.2.1.9)$$

Denne kan kombineres med den kinematiske betingelsen ved  $y = 0$ , gitt ved  $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t}$ . Dette gir

$$-\nu\phi + \frac{\partial\phi}{\partial y} - \nu\bar{\eta}\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0. \quad (3.2.1.10)$$

### 3.2.2 Integralligning for endelig utslag

Anvender man Greens teorem på dette problemet, vil det oppstå et tilleggsintegral over overflaten i spalten, og dette medfører at integralligningen får følgende form

$$\pi\phi = \iint_{S_w} \phi(\vec{a}) \frac{\partial G(\vec{a}, \vec{x})}{\partial n} dS - \iint_{S_w} G(\vec{a}, \vec{x}) \frac{\partial\phi}{\partial n} dS + \iint_{S_p} \phi(\vec{a}) \frac{\partial G(\vec{a}, \vec{x})}{\partial n} dS - \iint_{S_p} G(\vec{a}, \vec{x}) \frac{\partial\phi}{\partial n} dS. \quad (3.2.2.1)$$

Bruker man så at den normalderiverte på overflaten i spalten er  $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial y}$ , og betingelsen gitt ved ligning (3.2.1.10), får man følgende integralligning for den ikke-lineære korreksjonen

$$\pi\phi = \iint_{S_w} \phi(\vec{a}) \frac{\partial G(\vec{a}, \vec{x})}{\partial n} dS - \iint_{S_w} G(\vec{a}, \vec{x}) \frac{\partial\phi}{\partial n} dS - \iint_{S_p} G(\vec{a}, \vec{x}) \nu\bar{\eta} \frac{\partial\phi}{\partial y} dS. \quad (3.2.2.2)$$

For å løse integralligningen er potensialet definert som i seksjon (3.1), ligning (3.1.2.7), og den normalderiverte til korreksjonspotensialet tilfredstiller samme betingelsen på geometrien gitt ved ligning (3.1.2.9).

Den komplette integralligningen for potensialet på randa blir da følgende

$$\pi(\phi^{(0)} + \phi^{(1)}) = \iint_{S_w} (\phi^{(0)} + \phi^{(1)}) \frac{\partial G(\vec{a}, \vec{x})}{\partial n} dS - \iint_{S_w} G(\vec{a}, \vec{x}) \frac{\partial\phi^{(0)}}{\partial n} dS - \nu\bar{\eta}v_0 \iint_{S_p} G(\vec{a}, \vec{x}) dS, \quad (3.2.2.3)$$

hvor  $v_0$  er hastigheten fra det lineære potensialet. Feltligningen for potensialet i spalten finnes så ved

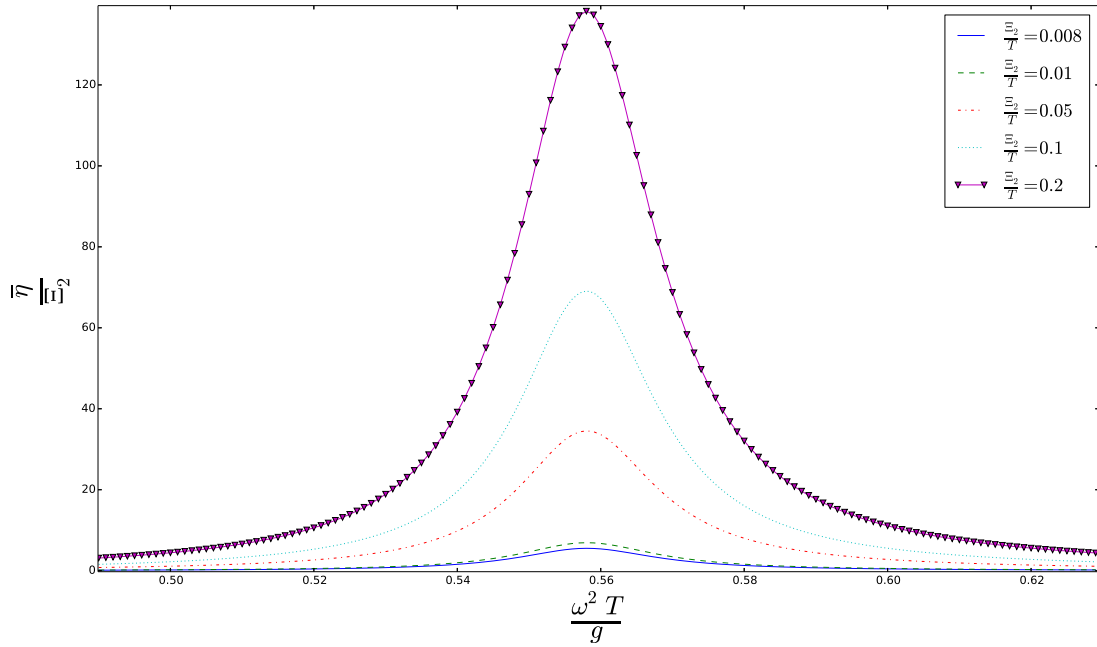
$$2\pi(\phi^{(0)} + \phi^{(1)}) = \iint_{S_w} (\phi^{(0)} + \phi^{(1)}) \frac{\partial G(\vec{a}, \vec{x})}{\partial n} dS - \iint_{S_w} G(\vec{a}, \vec{x}) \frac{\partial\phi^{(0)}}{\partial n} dS - \nu\bar{\eta}v_0 \iint_{S_p} G(\vec{a}, \vec{x}) dS. \quad (3.2.2.4)$$

Førsteordens bølgelaster og bølgeheving er funnet ved samme fremgangsmåte som definert i seksjon (3.1).

### 3.2.3 Analyse av tvunget bevegelse i hiv

I denne analysen er det betraktet samme situasjon som i underseksjon (3.1.3), hvor geometriene blir tvunget til å svinge med en gitt amplitude. Dette er vist i figur (3.1.3.1).

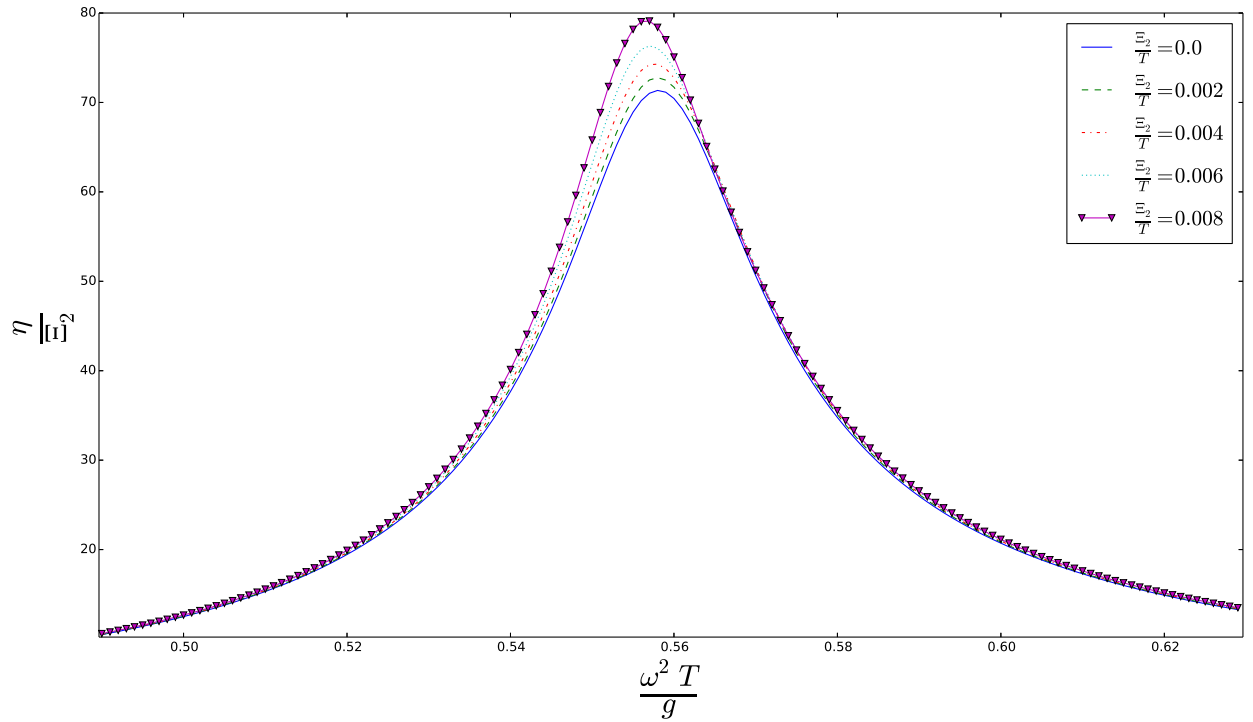
Det er valgt små amplituder i denne analysen. Dette skyldes den midlere bølgehevningen. Ved å bruke den lineære løsningen i uttrykket for den midlere vannstanden, vokser  $\bar{\eta}$  fort rundt resonans noe som skaper problemer. Dette vises i figur (3.2.3.1), hvor den midlere bølgehevningen er plottet for forskjellige svingeamplituder. Fra beregninger av bølgehevningen utført uten korreksjon (se figur (3.2.3.2), tilfellet  $\Xi_2/T = 0.0$ ), ser man at den midlere bølgehevningen har tilnærmet samme størrelses når  $\Xi_2/T = 0.1$ .



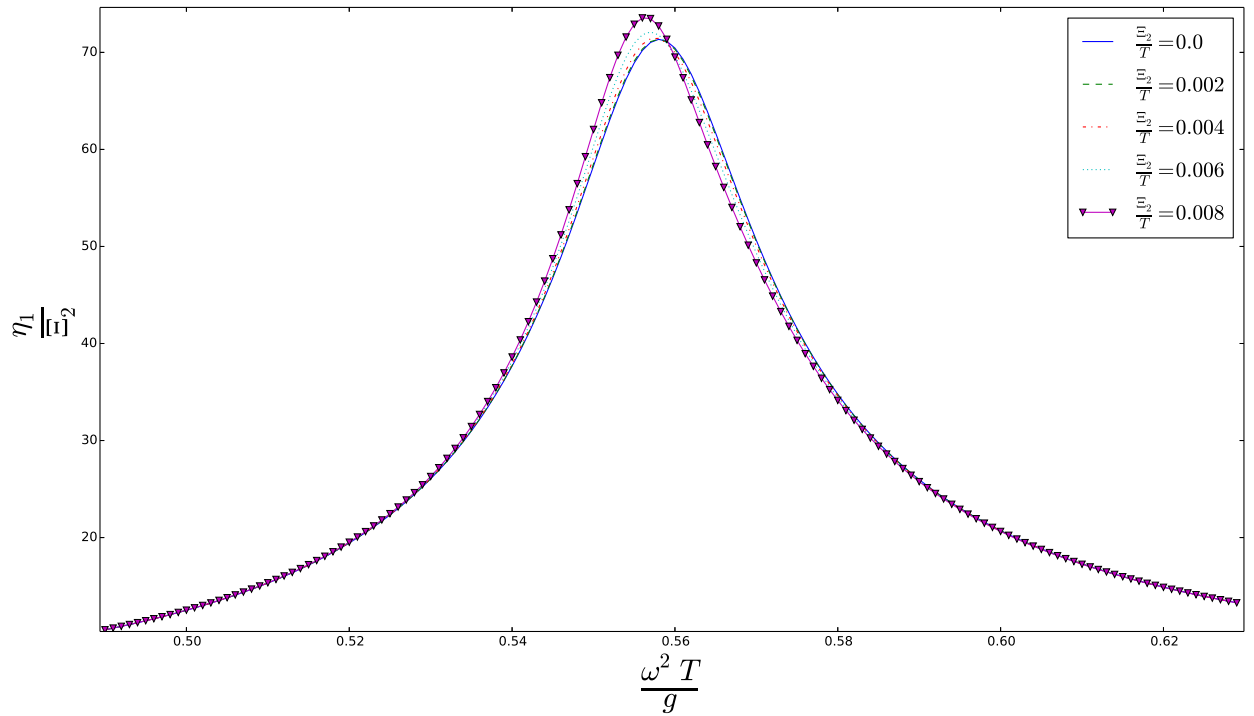
Figur 3.2.3.1: Den midlere bølgehevningen for forskjellige svingeamplituder. Den lineære bølgehevningen har tilnærmet  $\eta/\Xi_2 = 70$  som den maksimale verdien



I figur (3.2.3.2) vises bølgehevingen fra radiasjonspotensialet. Her øker bølgehevingen og det er ingen tegn på at den blir mindre. Man kan også se at løsningen har forskjøvet seg noe mot lavere frekvenser. Den svingende delen av bølgen er vist i figur (3.2.3.3), og her ser man tydeligere forskyvningen i frekvens. Det kommer også tydelig frem at den midlere bølgehevingen gir bidrag selv for små amplituder.

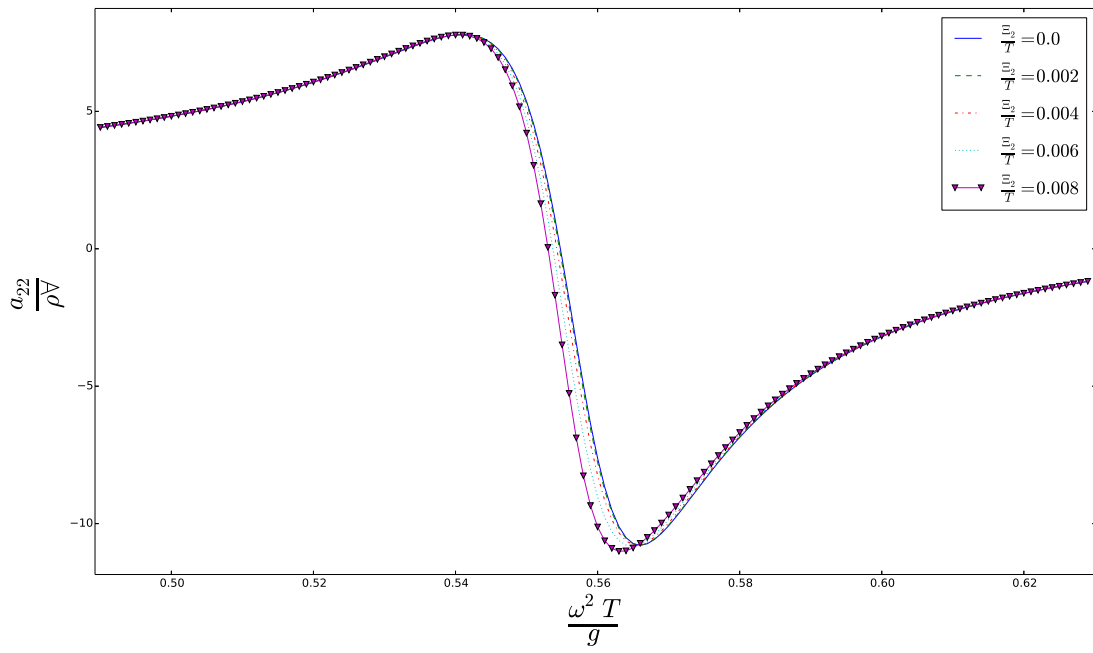


Figur 3.2.3.2: Bølgehevingen i spalten.  $\Xi_2/T$  er forholdet mellom den tvungende amplituden og dypgangen.  $\Xi_2/T = 0.0$  tilsvarer den lineære beregningen

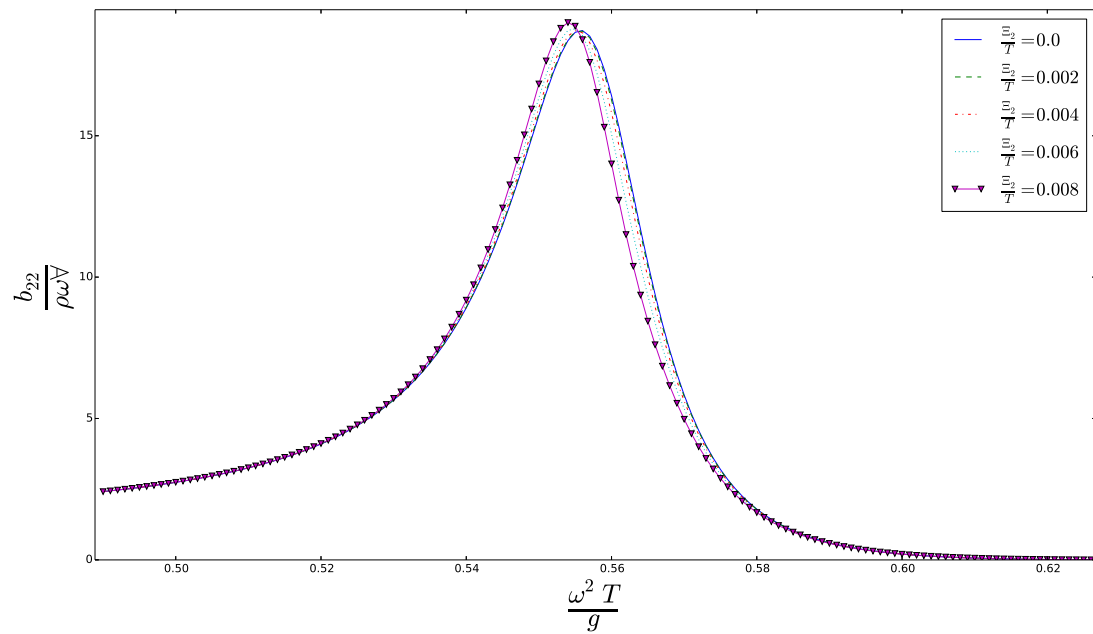


Figur 3.2.3.3: Den svingende delen av bølgehevningen i spalten

Den adderte massen er vist i figur (3.2.3.4). Her ser man at den får samme oppførsel som bølgehevningen, altså en forskyvning i frekvens. Den ser ut som den holder seg mer eller mindre konstant i absolutt verdi. Figur (3.2.3.5) viser dempningskoeffisienten. Denne opplever også samme frekvensforskyvning som vi så i bølgehevningen og den adderte massen. Koeffisienten får større maksverdi når  $\Xi_2/T$  blir større enn 0.004.



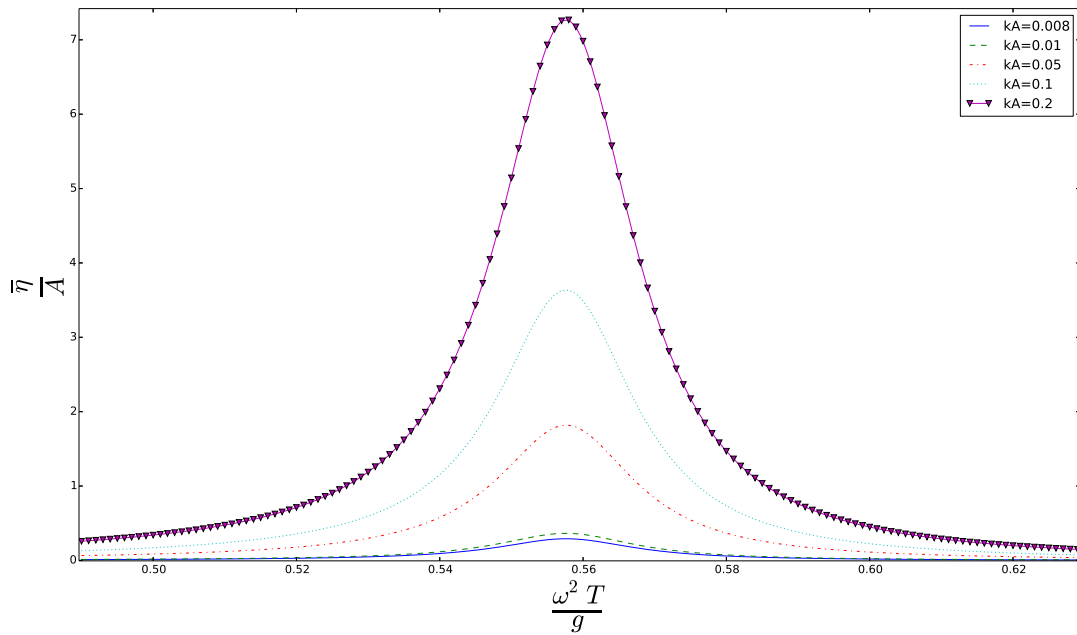
Figur 3.2.3.4: Addert masse i hiv.  $\Xi_2/T = 0.0$  tilsvarer den lineære beregningen



Figur 3.2.3.5: Dempningen i hiv. Når forholdet mellom  $\Xi_2/T$  blir større enn 0.004, øker maks-verdien betraktelig

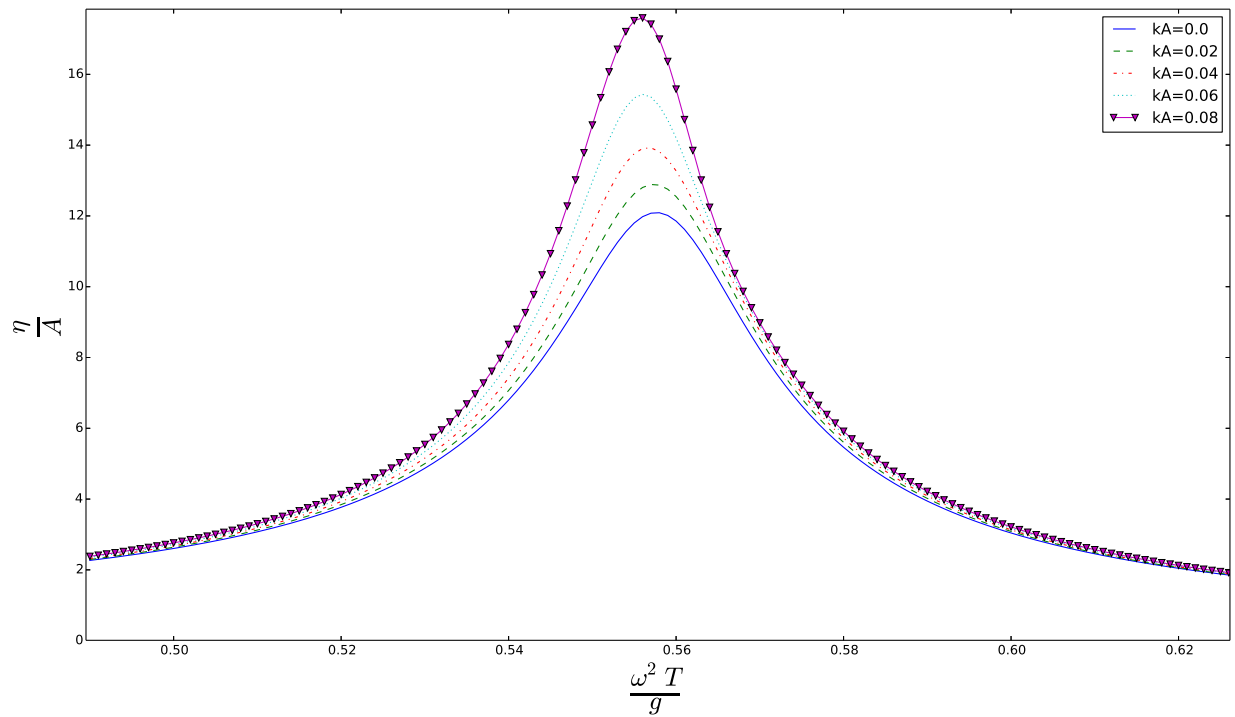
### 3.2.4 Analyse av fastholdt geometri

Her er det en innkommende bølge med amplitude  $A$ , geometriene er fastholdt, og responderer dermed ikke på bølgen. Problemet er skissert i figur (3.1.4.1). Det er også i denne analysen valgt små amplituder grunnet uttrykket for den midlere bølgehevningen. Figur (3.2.4.1) viser hvordan den midlere bølgehevningen oppfører seg for forskjellige bølgesteillheter.



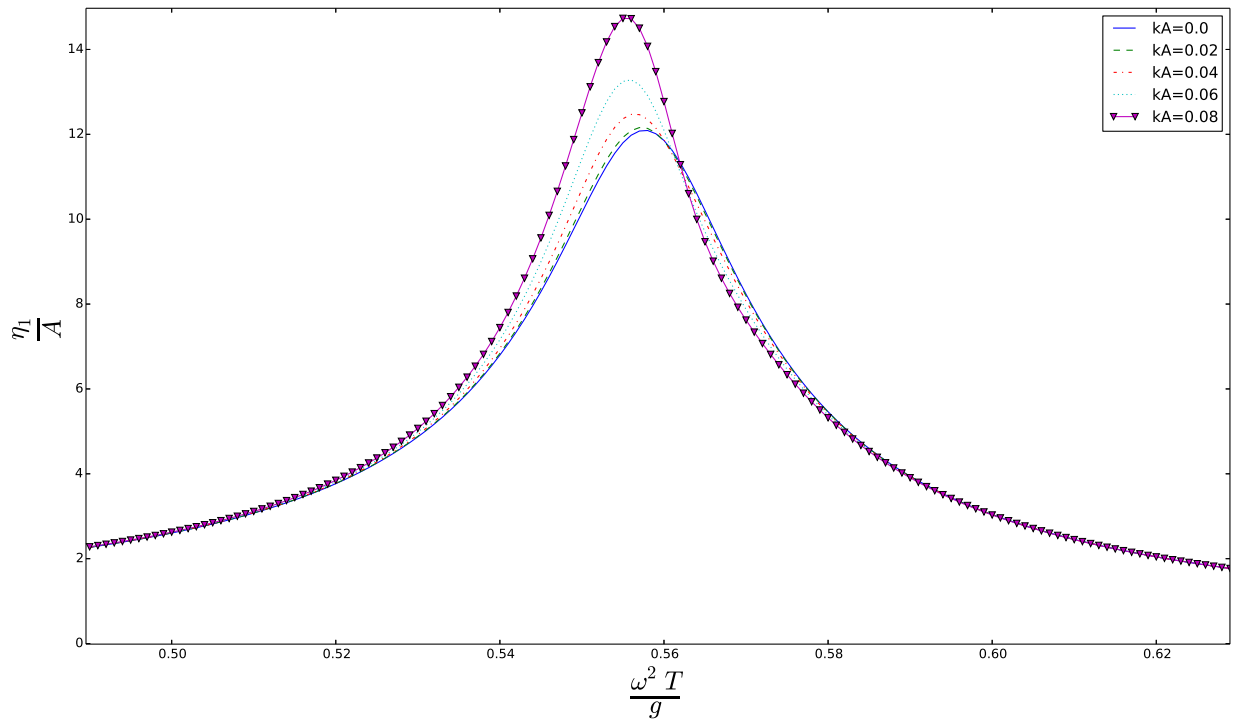
Figur 3.2.4.1: Den midlere bølgehevningen i spalten. Den lineære bølgehevningen har tilnærmet  $\eta/A = 12$  som den maksimale verdien

Figur (3.2.4.2) viser bølgehevningen i spalten med korreksjon fra endelig utslag. Beregningen gir større amplitude når forholdet mellom  $kA$  blir større. Løsningen blir også forskjøvet mot lavere frekvenser.



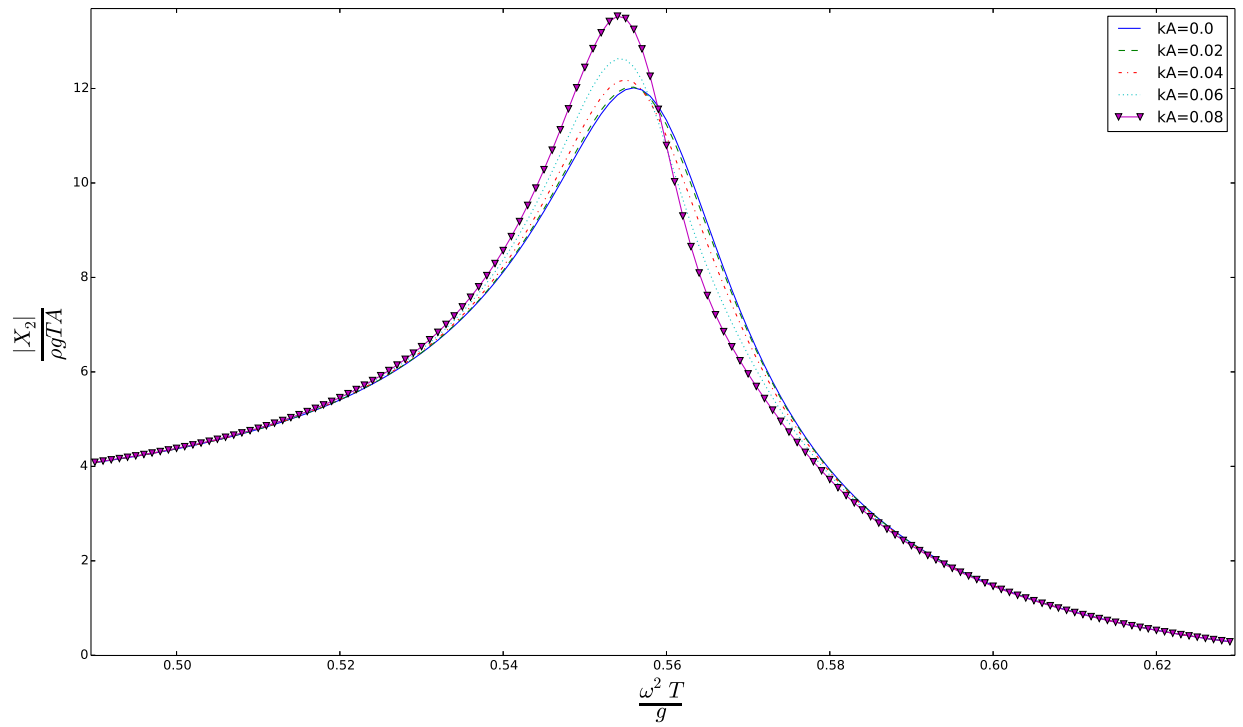
Figur 3.2.4.2: Beregnet bølgehevningen med korreksjon for endelig utslag. Tilfellet  $kA = 0.0$  viser den lineære løsningen

Den svingende delen av bølgehevningen er vist i figur (3.2.4.3). Her ser man tydeligere forskyvningen i frekvens, og man kan se hvordan bølgen får raskt økende amplitude når  $kA$  blir større.



Figur 3.2.4.3: Bidraget fra den svingende delen til bølgehevningen

Eksitasjonskraften er vist i figur (3.2.4.4). Det samme gjenspeiler seg her. Kraften blir større på resonansfrekvens, og man kan se at løsningen har forskjøvet seg i frekvens.

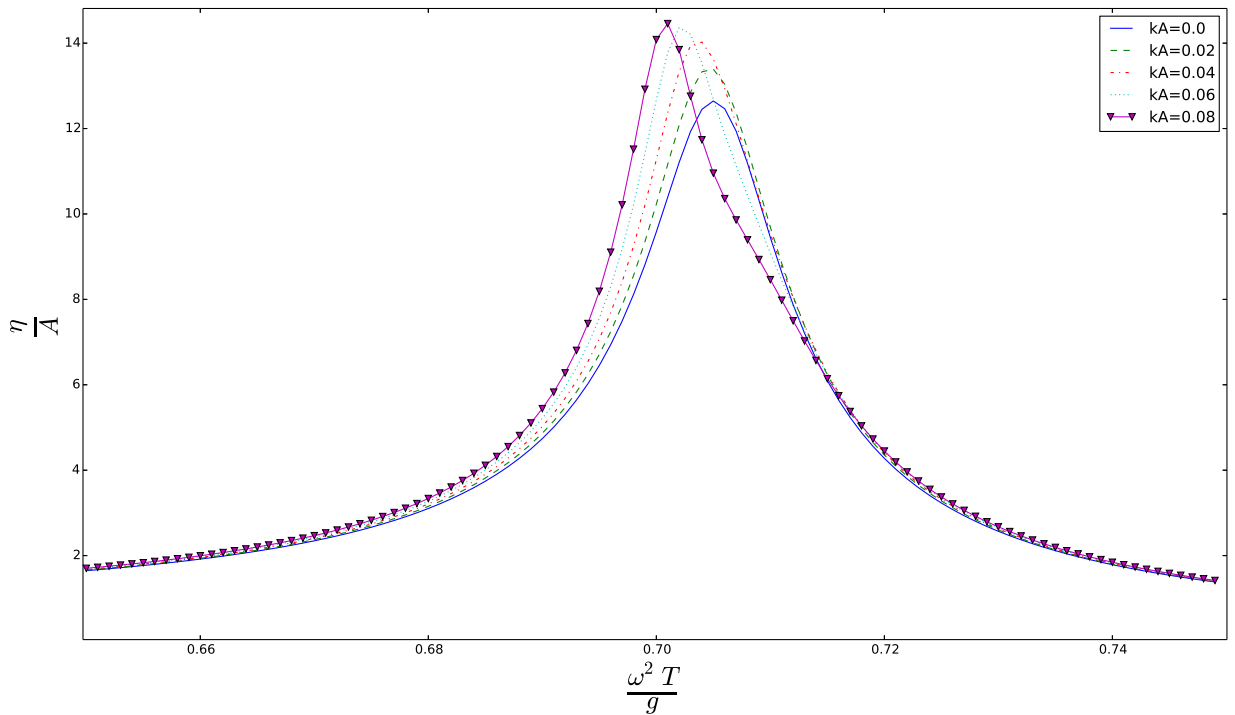


Figur 3.2.4.4: Eksitasjonskraft med korreksjon for ikke-lineær effekt

### 3.2.5 Analyse av frittflytende geometri i et innkommende bølgefelt

I dette tilfellet får geometriene respondere til den innkommende bølgen, og problemet er det samme som vist i figur (3.1.5.1) fra underseksjon (3.1.5). Det har blitt utført beregninger for forskjellige verdier av  $kA$ . I tilfellet hvor  $kA = 0.0$  tilsvarer dette den lineære beregningen hvor korreksjonsleddet i integralligningen for endelig utslag er null.

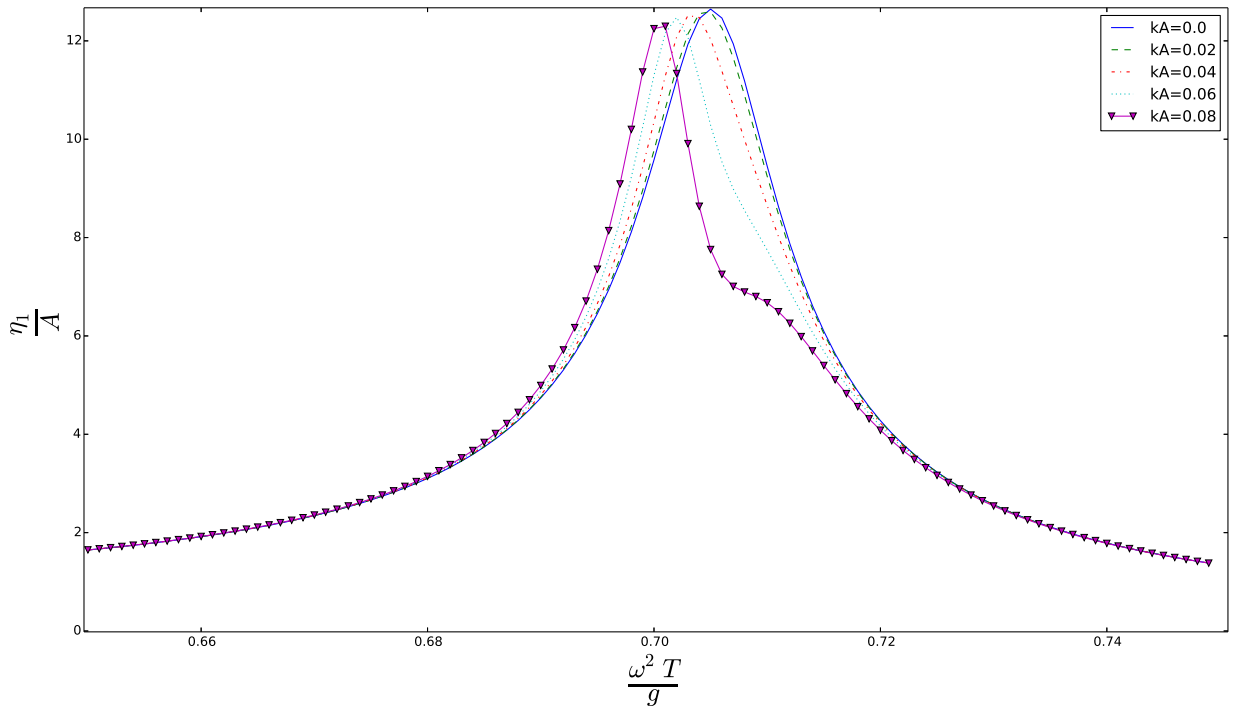
Figur (3.2.5.1) viser bølgehevingen i spalten beregnet i punktet  $\vec{x} = (0, 0)$ , og her kan man se en forskyvning i frekvens på lik linje som resultatene av bølgen i underseksjon (3.2.3) og (3.2.4). Bølgehevingen ser ut til å øke kraftigst mellom  $kA = 0.0$  og  $kA = 0.02$ . Deretter flater den mer ut. Det er også en underlig oppførsel som kommer frem i bølgehevingen for tilfellet  $kA = 0.08$  rundt området  $\omega^2 T/g \simeq 0.71$ . Denne oppførselen er ikke fysisk, og kommer inn når ligningen for bevegelsen til geometriene blir løst.



Figur 3.2.5.1: Bølgeheving i spalten når geometrien responderer fritt i en innkommende bølge

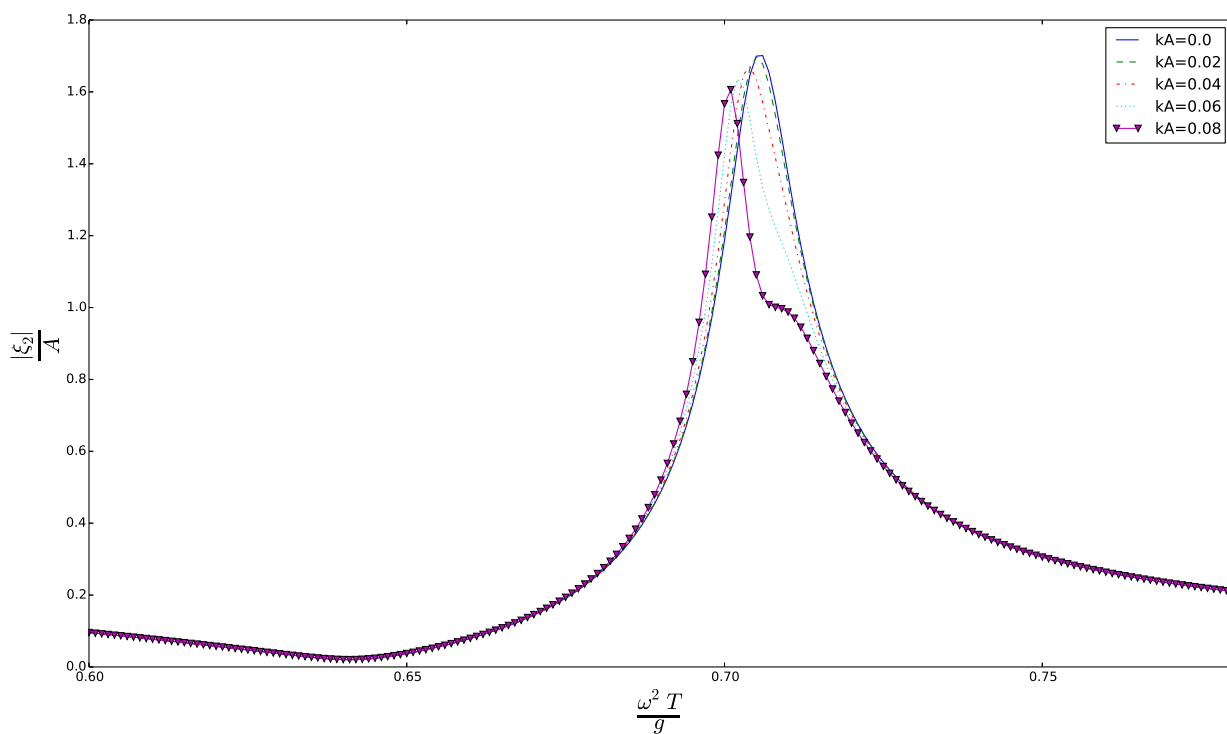


Figur (3.2.5.2) viser den svingende delen til den beregnede bølgehevningen. Her ser man tydelig forskyvningen i frekvens når forholdet mellom den innkommende bølgeamplituden og bølgetallet blir større. Det ser ut til at bølgehevningen holder seg relativt konstant på maksverdi, men selve resonansområdet blir smalere i frekvens. Den merkelige oppførselen som kommer for  $kA = 0.08$  i området  $\omega^2 T/g \simeq 0.71$  blir veldig tydelig.



Figur 3.2.5.2: Beregnet bølgehevningen med korreksjon for endelig utslag. Figuren viser kun bidraget fra den svingende delen til bølgehevningen. Beregningsverdien er fra  $\vec{x} = (0, 0)$

Hiv responsen til geometrien er vist i figur (3.2.5.3), og her kan man se at bevegelsen til geometrien blir mindre for økende  $kA$ . Det er også en forskyvning i frekvens. Rundt  $\omega^2 T/g \simeq 0.71$  kan vi igjen se den merkelige oppførselen for  $kA = 0.08$ . Det er observert fra beregning av eksitasjonskraft at den ikke får samme forskyvning i frekvens som den adderte massen og dempningen. Dette kan være årsaken til nettopp denne oppførselen.



Figur 3.2.5.3: Respons amplitude operator i hiv

### 3.3 Endelig utslag og heft

I denne seksjonen blir løsningen fra det lineære tilfellet, heft og endelig utslag lagt sammen slik at potensialet kan skrives som

$$\Phi = \Re\{(\phi_{lin} + \phi_{heft} + \phi_{e.utslag})e^{i\omega t}\}. \quad (3.3.0.1)$$

Indeks *lin* betyr det lineære potensialet, *heft* for løsningen av problemet i seksjon (3.1) og *e.utslag* betyr løsningen av problemet i seksjon (3.2).

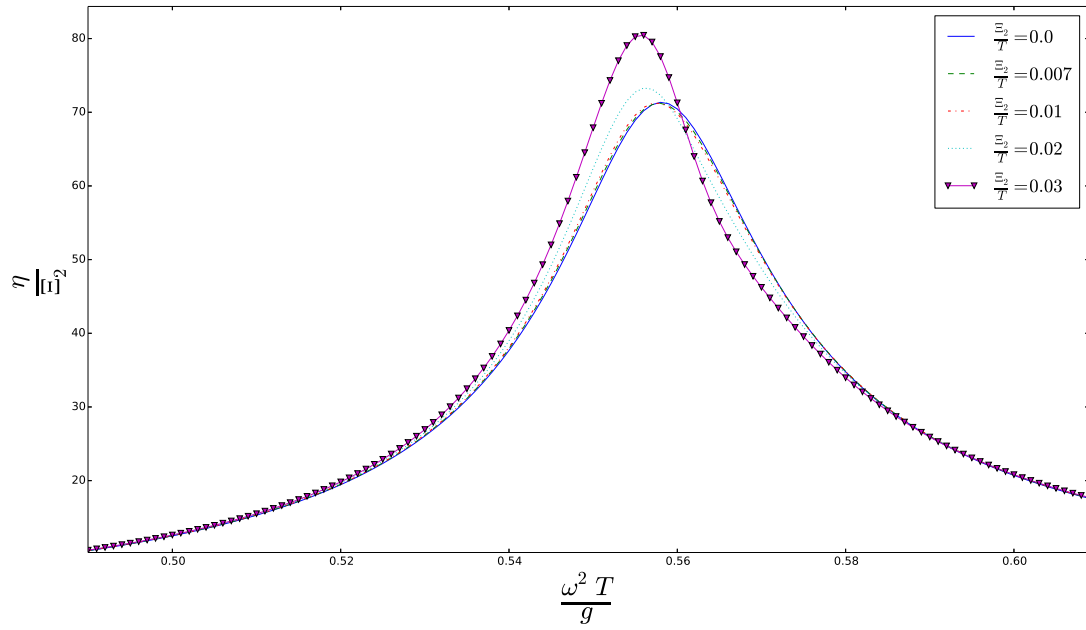
Fra analysen i seksjon (3.2), så man at den midlere bølgehevningen ble fort stor når forholdet mellom  $kA$  eller  $\Xi_2/T$  økte. Derfor er det i denne analysen brukt en iterativ metode for å finne den midlere bølgehevningen når det er korrigert for heft og endelig utslag. Denne metoden er vist i tillegg (E.2).

#### 3.3.1 Analyse av tvunget bevegelse i hiv

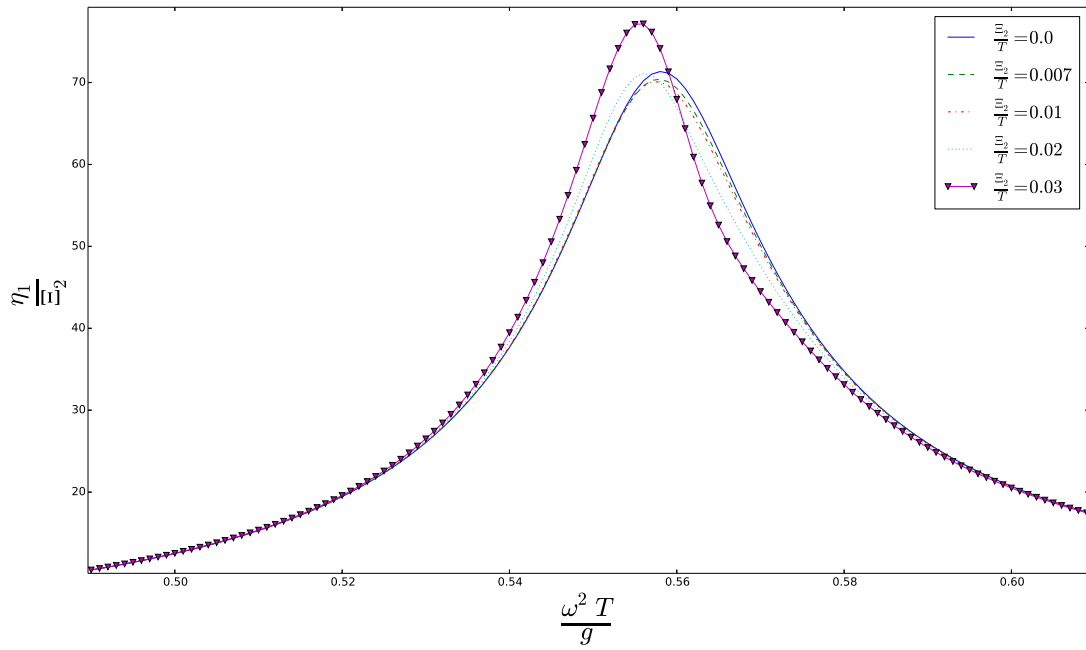
Her betraktes det to rektangulære geometrier som blir tvunget til å svinge med en gitt amplitude  $\Xi_2$ . Det er vist skisse av problemet i figur (3.1.3.1).

I figur (3.3.1.1) vises beregning av bølgehevningen i spalten. Her ser man at  $\eta/A$  holder seg mer eller mindre konstant for  $\Xi_2/T \leq 0.01$ , og dette er et tegn på at bidraget fra heft og endelig utslag balanserer hverandre. Når  $\Xi_2/T > 0.01$  blir bidraget fra endelig utslag dominerende, og bølgehevningen blir større. Det blir også en forskyvelse av løsningen i frekvens.

Figur (3.3.1.2) viser den svingende delen av bølgehevningen, og her ser man at løsningen blir mindre rundt resonansfrekvens ved  $\Xi_2/T < 0.02$ . Når  $\Xi_2/T \geq 0.02$  blir bidraget fra endelig utslag dominerende, noe som medfører at løsningen vokser.

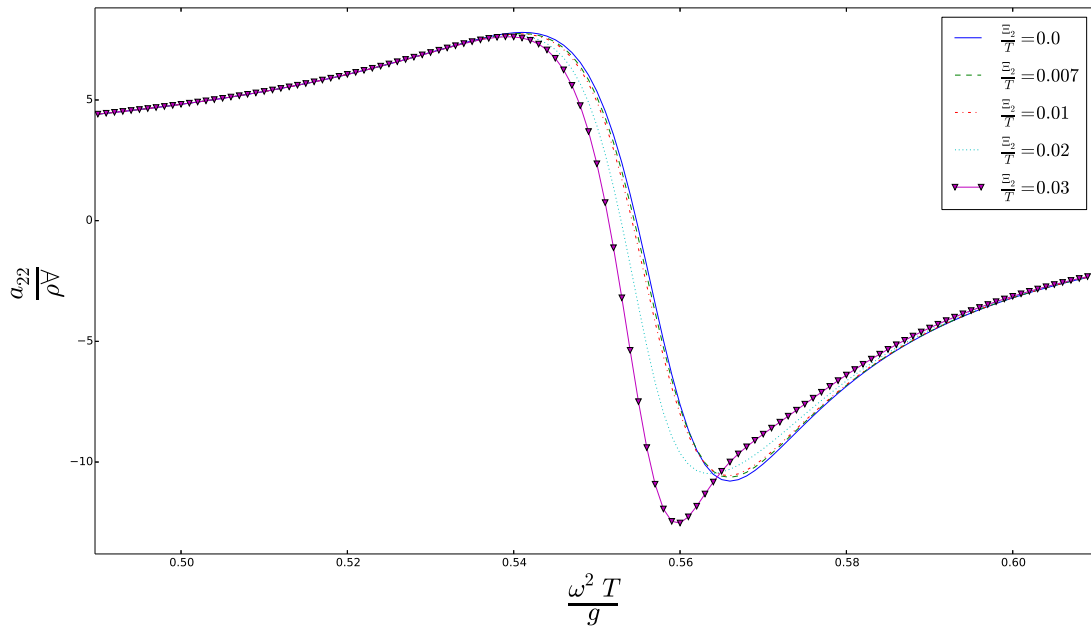


Figur 3.3.1.1: Bølgehevning i spalten når geometrien blir tvunget til å svinge med amplitude  $\Xi_2$ ,  $\Xi_2/T = 0$  viser den lineære beregningen

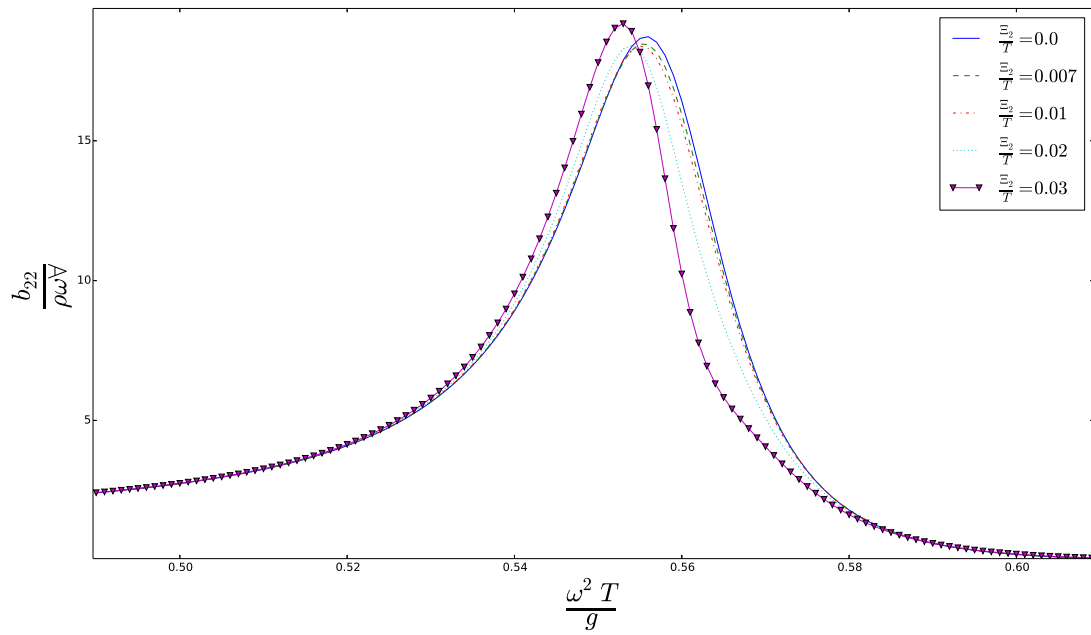


Figur 3.3.1.2: Den svingende bølgekomponenten fra tvunget bevegelse hiv

Den adderte massen er vist i figur (3.3.1.3). Her kan man også se at løsningen forskyves i frekvens, og det vises også at man får en dempende effekt for  $\Xi_2/T < 0.02$ . Når svingeamplituden  $\Xi_2/T$  blir større enn 0.02 blir det observert at løsningen blir mer negativ. Dempningskoeffisienten er vist i figur (3.3.1.4), og denne viser samme tendens som radiasjonsbølgen. Løsningen blir dempet for  $\Xi_2/T \leq 0.02$ . Deretter blir bidraget fra endelig utslag dominerende over bidraget fra heft, dette gjør at koeffisienten blir større.



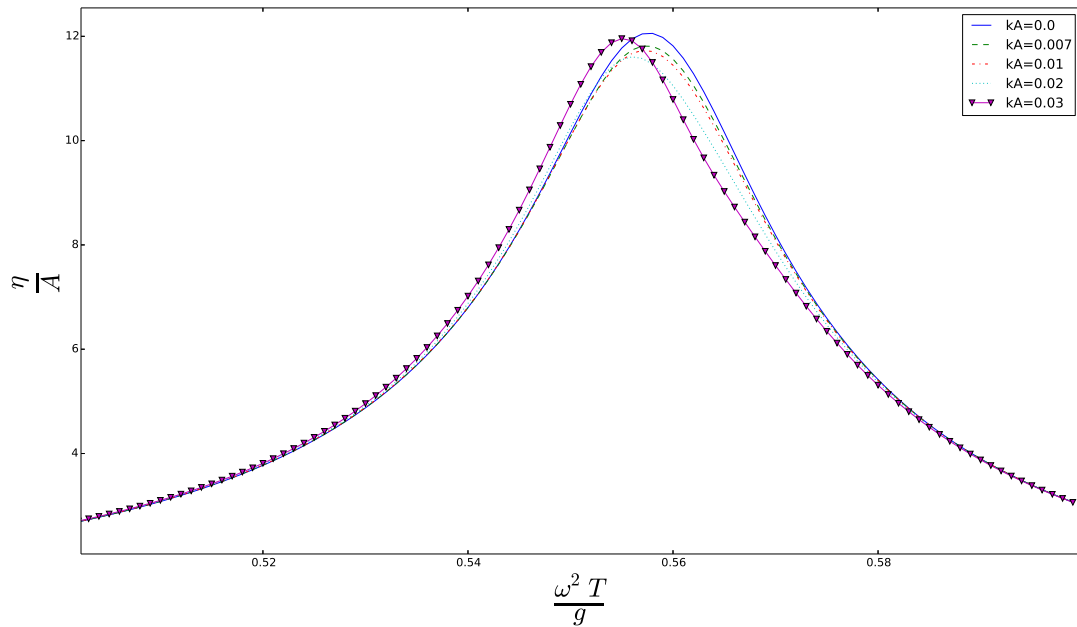
Figur 3.3.1.3: Den adderte massen i hiv. Her er  $\Xi/T$  forholdet mellom den tvungende amplituden og dypgangen. Tilfellet hvor dette er null tilsvarer den lineære løsningen



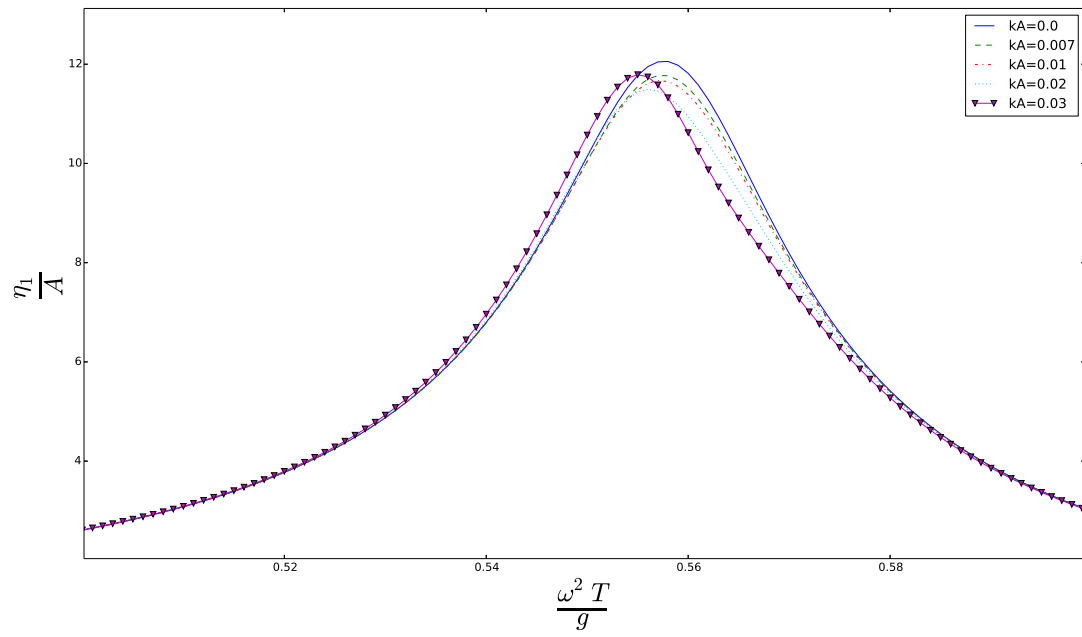
Figur 3.3.1.4: Dempningskoeffisienten i hiv er vist for forskjellige forhold mellom den tvungende amplituden og dypgangen. Når forholdet er null, tilsvarer dette det lineære tilfellet

### 3.3.2 Analyse av fastholdt geometri

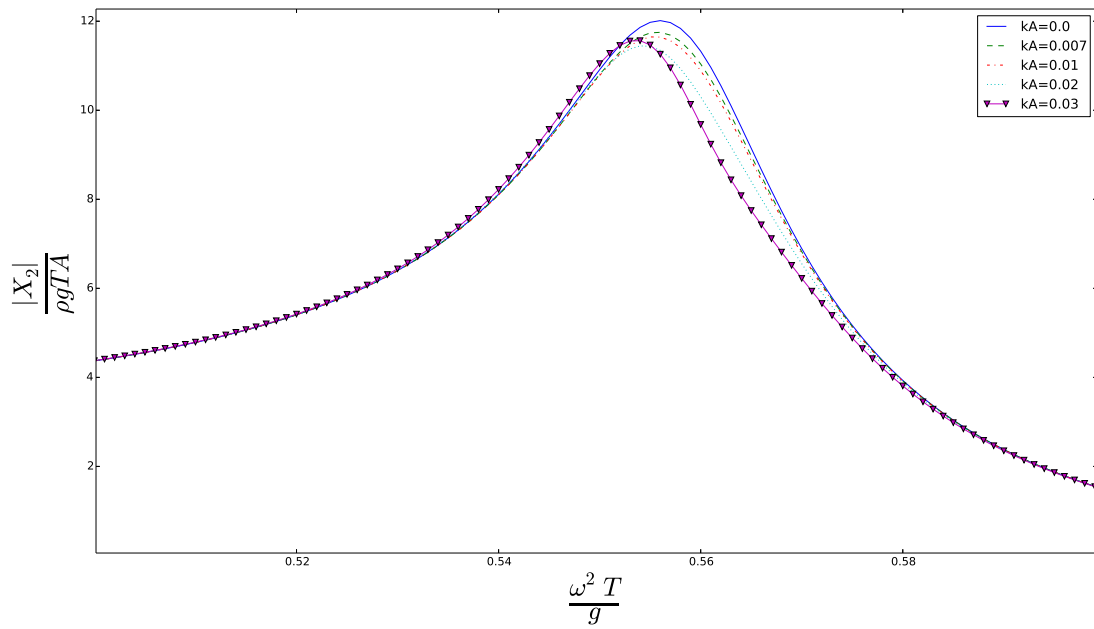
I denne analysen er geometrien fastholdt slik at den ikke kan bevege seg til den innkommende bølgen. Skissering av problemet er vist i figur (3.1.4.1). Beregning av bølgehevningen i spalten er vist i figur (3.3.2.1). Her ser man at bølgehevningen dempes når  $kA \leq 0.02$ . Når  $kA = 0.03$  har effekten fra endelig utslag nesten utjevnet bidraget fra heft. For verdier  $kA > 0.03$  blir bølgehevning større enn den lineære, og vokser fort mot store verdier. Figur (3.3.2.2) viser den svingende delen til bølgehevningen. Eksitasjonskraften er vist i figur (3.3.2.3), og viser samme tendens som bølgehevningen. For små  $kA$  dempes kraften, men når  $kA$  blir større får effekten fra endelig utslag større effekt, noe som gjør at kraften igjen blir større.



Figur 3.3.2.1: Bølgehevning i spalten når geometrien er fastholdt slik at den ikke kan respondere til den innkommende bølgen



Figur 3.3.2.2: Den svingende bølgekomponenten når geometrien er fastholdt



Figur 3.3.2.3: Eksitasjonskraften i hiv

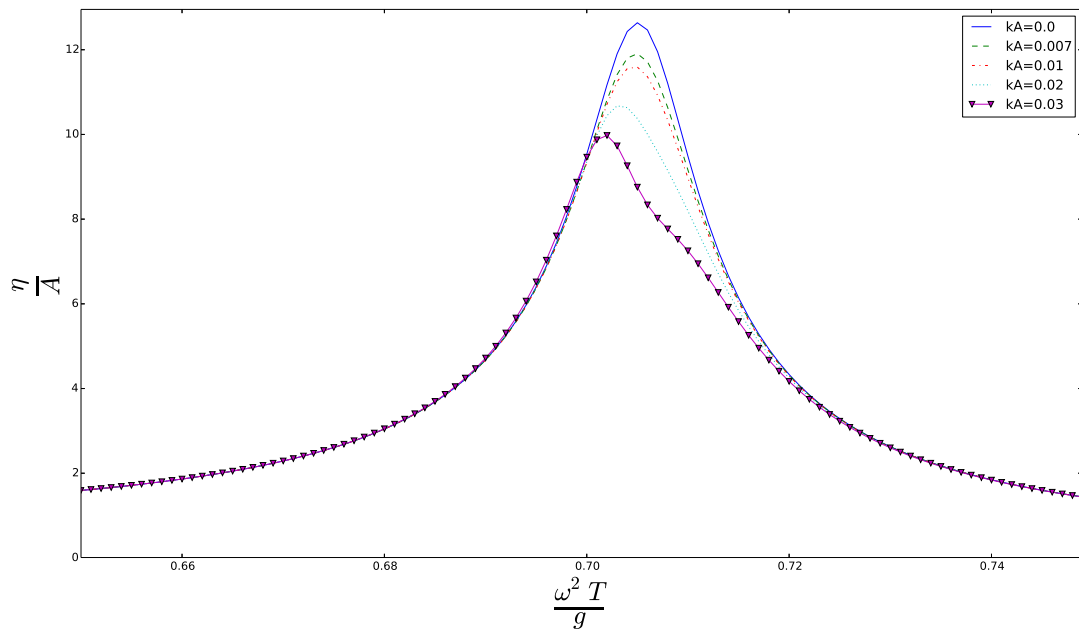


### 3.3.3 Analyse av fritt flytende geometri i et innkommende bølgefelt

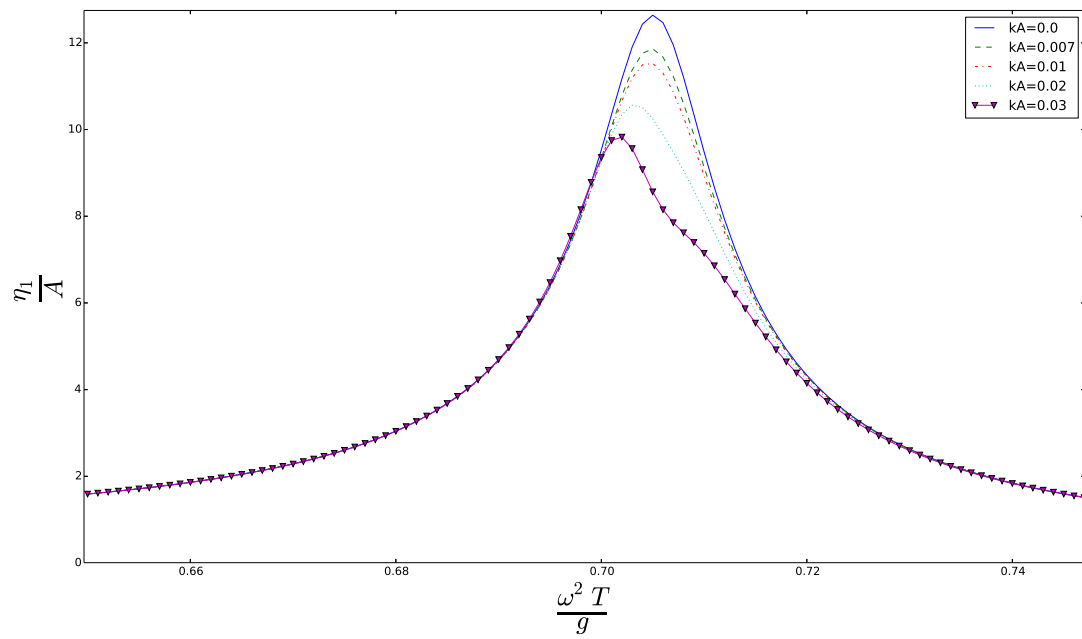
I denne analysen får geometriene respondere til en innkommende bølge med amplitude  $A$ . Dette er skissert i figur (3.1.5.1).

Figur (3.3.3.1) viser bølgehevningen i spalten. Denne bølgen blir dempet for alle  $kA$ . Fra  $kA = 0.01$  blir effekten fra endelig utslag mer tydelig, og her bidrar begge leddene til demping. Bidraget fra heft demper i potensialet og bevegelsen, mens bidraget fra endelig utslag demper i kun bevegelsen til geometri. Den svingende delen av bølgen er vist i figur (3.3.3.2). Når forholdet  $kA$  blir større får bølgen mer likhetstrekk med den som ble vist i underseksjon (3.2.5).

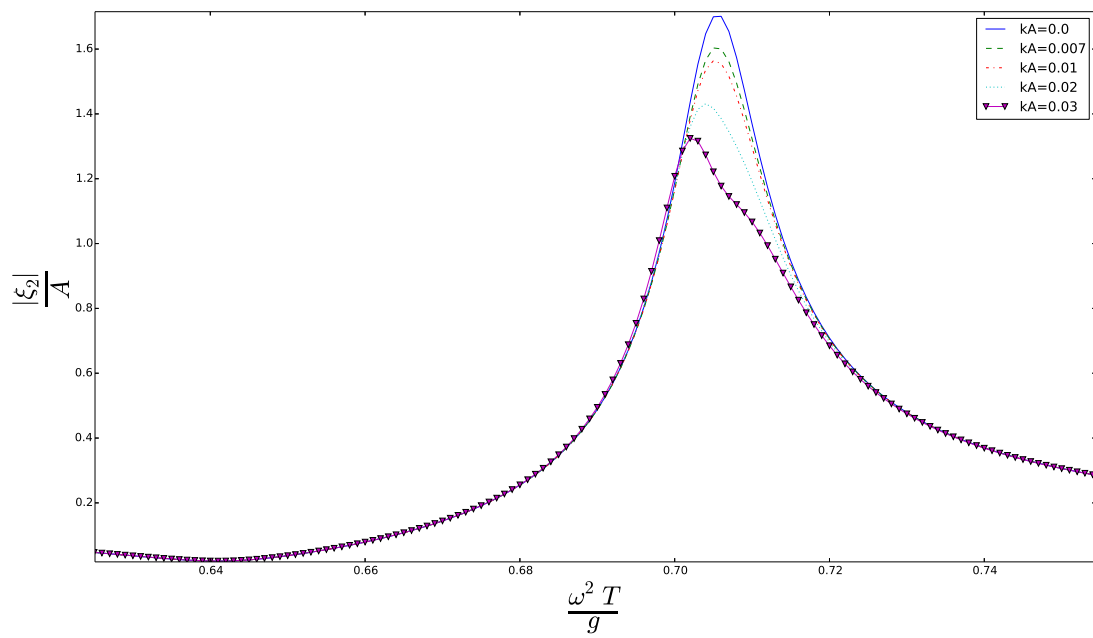
Bevegelsen til geometrien er vist i figur (3.3.3.3). Denne får samme oppførsel som bølgehevningen.



Figur 3.3.3.1: Bølgehevningen i spalteåpningen hvor geometriene får respondere fritt til den innkommende bølgen



Figur 3.3.3.2: Den svingende delen av bølgehevningen



Figur 3.3.3.3: Respons amplitude operator i hiv

# Kapittel 4

## Konklusjon

I denne oppgaven har to koblede rektangulære geometrier på fri overflate i to dimensjoner blitt betraktet. Når spalten mellom geometriene er liten, har man fra eksperimentelle målinger observert at vanlig ”sea keeping” programmer overpredikerer resultatene. Hovedfokuset har vært å utvikle en metode som kan bidra til å dempe den vertikale bevegelsen til væsken i spalten. Det har også blitt analysert hvordan dette kan påvirker kreftene. Lineære beregninger i 2-D og 3-D er utført for sammenligning og verifisering.

Det har blitt utviklet to metoder som har blitt testet på forskjellige typer situasjoner. I den første situasjonen har geometriene blitt tvunget til å svinge med en gitt amplitude. I den andre situasjonen er det en innkommende bølge, og geometriene fastholdt. Den tredje situasjonen er det en innkommende bølge som geometriene får respondere på. Alle beregningene er utført i et Boundary Element Method (BEM) program utviklet av forfatter.

I det lineære tilfellet har beregninger blitt sammenlignet med resultater fra kommersiell programvare utviklet av DNV-GL. Her er det god overenstemmelse av krefter og bevegelser til geometriene, men med noe avvik i beregningen av bølgen. Dette avviket skyldes respons fra bevegelser som skal være null når det er sidesjø og symetri om  $x = 0$  og  $y = 0$ . Det ble observert at geometrien fikk bidrag på  $\simeq 3^\circ$  ”pitch” fra 3-D beregningene.

Den første metoden (presentert i seksjon (3.1)) beskriver dempning grunnet friksjon fra geometriene i spalten. Her er det anvendt et kvadratisk uttrykk for å representere skjærspenningen mellom væske og geometri. Dette kalles heft. Uttrykket for skjærspenningen ble integrert opp langs geometriene og inkluderes i betingelsen på overflaten som et trykk. Fra beregningene utført med heft (underseksjon (3.1.3)), kan man se at bølgehevningen og kreftene blir betraktelig dempet sammenlignet med lineære beregninger. Når den vertikale hastigheten i spalten

blir stor ser man effekten av at det er anvendt en kvadratisk metode til å dempe potensialet i spalten. Det er denne oppførselen som gjør at beregning av bølgehevningen og dempningskoeffisienten får to toppunkter. I virkeligheten vil dette ikke skje. Beregningen av den adderte massen gir tydelig dempning i områder på begge sider av et karakteristisk krysningspunkt. Både den lineære beregningen og beregning utført med heft går gjennom dette krysningspunktet, noe som gjør at den adderte massen er konstant på denne frekvensen for alle beregninger med og uten heft.

Beregningene utført i underseksjon (3.1.4) viser bølgehevning fra diffraksjonproblemet og eksitasjonskraft. Her får ikke bølgen like sterk dempningseffekt som vist i radiasjonsproblemet. Det samme gjenspeiler seg hvis man sammenligner eksitasjonskraften med dempningskoeffisienten. Det er utført beregninger med større bølgesteillhet enn det som er presentert her, og disse resultatene dempet betraktelig mer. Man kunne tydelig se at det er anvendt et kvadratiske uttrykk i skjærspenningen.

Når geometriene får respondere fritt på den innkommende bølgen, får bølgehevningen en annen resonansfrekvens. I beregningene fra diffraksjon- og radiasjonsproblemet får væskebevegelsen i spalten et resonansområde der dempningskoeffisienten har toppunkt og den adderte massen skifter fortegn. Nå er resonansfrekvensen knyttet til geometriens bevegelse. Bølgen som kommer fra radiasjons- og diffraksjonsproblemet kansellerer hverandre grunnet motfase. Denne kanselleringseffekten er ikke analysert i denne oppgaven, men det er observert at denne effekten fortsatt skjer i beregningene hvor det er korrigert for heft. Resultat fra beregning av geometribevegelse viser at denne blir dempet. Bevegelsen til geometrien er direkte knyttet til bølgehevningen, og dermed gir dette mindre bølgehevning i spalten når den vertikale hastigheten blir større. Disse resultatene viser at potensialet og bevegelsen til geometrien blir dempet. Fra et energiperspektiv ville det vært interessant og utforsket bølgen på utsiden av geometriene, og sett hvordan denne har forandret seg. Dette kan gi et klarere bilde på om den numeriske metoden gir korrekte beregninger.

I den andre metoden (presentert i seksjon (3.2)) inkluderes et ikke-lineært bidrag i form av en midlere forhøyning av væsken mellom geometriene. Beregning av bølgehevning, addert masse og dempningskoeffisient når geometriene tvinges til å svinge med en gitt amplitude er vist i underseksjon (3.2.3). Resultatene viser at kreftene og bølgehevningen blir større selv om det er brukt små svingeamplituder. Det viser seg at løsningen også forskyver resonansfrekvensen. Denne oppførselen gjenspeiler seg i diffraksjonsproblemet (underseksjon (3.2.4)). Når geometriene får respondere fritt på den innkommende bølgen (underseksjon (3.2.5)), vil den svingende delen av bølgen (ser bort fra den midlere bølgehevningen) få en dempet løsning av ubetydelig

størrelse. Denne dempende effekten kommer fra at bevegelsen til geometriene blir mindre. Her ble det også testet hva som skjer når bølgesteilheten blir større (ikke vist i oppgaven). Resultatet viser en kraftig forskyvelse av resonansfrekvens mot større bølgelengder, og den svingende bølgekomponenten forblir konstant i maksimal amplitude.

Det ble også utført beregning av de to metodene kombinert. Her ble det brukt en iterativ metode for å holde den midlere bølgehevningen liten. For små amplituder ble det vist at krefter og bølgehevning ble dempet samtidig som de fikk en forskyvning av resonansfrekvens i alle tilfellene den ble testet ut på. Når amplituden øker, kom man til et punkt hvor bidraget fra endelig utslag ble større enn heft, og dette ga større krefter og bølgehevning i diffraksjon- og radiasjonproblemet. I tilfellet hvor geometrien responderer fritt på den innkommende bølgen, ble løsningen dempet og resonansfrekvensen forskjøvet.

Fra resultatene ovenfor konkluderes det med at metoden hvor det blir korrigert for heft gir den ønskede effekten. Resultatene hvor det er korrigert for endelig utslag, ga ikke den dempende effekten som var ønsket. Det må tas i betraktning at beregningene med korreksjon utført i program utviklet av forfatter ikke er verifisert mot andre som har utført tilsvarende beregninger. Det er heller ingen andre som har utført beregninger av dette fenomenet på tilsvarende måte så langt forfatter vet.

Videre arbeid vil være å implementere metoden for heft i 3-D, og eventuelt utvikle en modell for å tillate variasjon over spalten. Det vil også være interessant å utvikle en modell for friksjonskoeffisienten for å optimalisere dempningseffekten for forskjellige problemstillinger. Virvelavløsning er trukket frem som den dominerende effekten til å redusere overflatehevningen i følge Kristiansen og Faltinsen [8]. Studier og implementering av denne effekten vil være viktige arbeider mot å kunne modellere fysisk korrekt oppførsel.



# Tillegg A

## A.1 Greens teorem

Anta to løsninger av Laplace ligningen i et volum  $V$  i en væske begrenset av en lukket flate  $S$ . Ved å anvende divergensteoremet gir dette

$$\int \int_S (\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n}) dS = \iiint_V \nabla \cdot (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) dV = \iiint_V (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi - \nabla \psi \cdot \nabla \phi - \psi \nabla^2 \phi) dV = 0. \quad (\text{A.1.0.1})$$

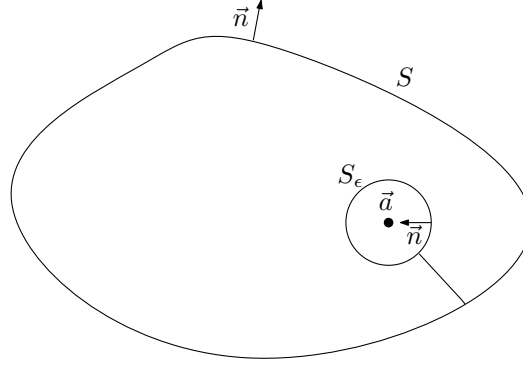
Lar vi  $\psi$  være en kilde definert som  $\psi = \ln r$ , hvor  $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$  og kildens lokasjon er i punktet  $\vec{a} = (a, b)$  ser vi at  $\psi$  tilfredstiller Laplaces ligning i alle punkter unntatt  $\vec{a}$ . Vi må derfor integrere rundt dette punktet.

Ved å omslutte kildens punkt med en sirkel som har radius  $r = \epsilon$  og randen  $S_\epsilon$  slik at  $S + S_\epsilon$  er lukket, kan ligning (A.1.0.1) erstattes med

$$\iint_S (\phi \frac{\partial}{\partial n} \ln r - \ln r \frac{\partial \phi}{\partial n}) dS = - \iint_{S_\epsilon} (\phi \frac{\partial}{\partial n} \ln r - \ln r \frac{\partial \phi}{\partial n}) dS = 0. \quad (\text{A.1.0.2})$$

På randen  $S_\epsilon$  er  $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial n} \ln r|_{r=\epsilon} = -\frac{1}{r}|_{r=\epsilon} = -\frac{1}{\epsilon}$ .

Deretter Taylor-utvikles  $\phi(\vec{x})$  og  $\nabla \phi(\vec{x})$  på randen  $S_\epsilon$



Figur A.1.0.1: Skisse av integrasjonsområdet

$$\phi(\vec{x}) \simeq \phi(\vec{a}) + (\vec{x} - \vec{a}) \nabla \phi(\vec{x})|_{\vec{a}} = \phi(\vec{a})(1 + \mathcal{O}(\epsilon)), \quad (\text{A.1.0.3})$$

$$\nabla \phi(\vec{x}) \simeq \nabla \phi|_{\vec{a}} + (\vec{x} - \vec{a}) \nabla(\nabla \phi)|_{\vec{a}} = \nabla \phi|_{\vec{a}}(1 + \mathcal{O}(\epsilon)). \quad (\text{A.1.0.4})$$

Integralligningen (A.1.0.2) blir da

$$- \iint_{S_\epsilon} (\phi(\vec{a})(1 + \mathcal{O}(\epsilon)) \frac{1}{\epsilon} - \ln \epsilon \vec{n} \cdot \nabla \phi|_{\vec{a}}(1 + \mathcal{O}(\epsilon))) dS = \iint_S (\phi \frac{\partial}{\partial n} \ln r - \ln r \frac{\partial \phi}{\partial n}) dS. \quad (\text{A.1.0.5})$$

Ved å utføre integralet på venstre siden av likhetstegnet i ligning (A.1.0.5) og lar  $\epsilon \rightarrow 0$ , får vi da følgende resultat

$$\iint_S (\phi \frac{\partial}{\partial n} \ln r - \ln r \frac{\partial \phi}{\partial n}) dS = \begin{cases} 0 \\ \pi \phi(\vec{x}), \vec{x} \in \text{randen} \\ 2\pi \phi(\vec{x}), \vec{x} \in \text{fluidet} \end{cases}. \quad (\text{A.1.0.6})$$



## A.2 2-D Green funksjon

I denne analysen er det gunstig å velge en funksjon  $G_2$  til å bestå av

$$G_2(\vec{x}; \vec{a}) = \ln r - \ln r_1 + \psi_2(\vec{x}, \vec{a}). \quad (\text{A.2.0.7})$$

Hvor  $r$ , og  $r_1$  er definert som

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}, \quad (\text{A.2.0.8})$$

$$r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + (y+b)^2}. \quad (\text{A.2.0.9})$$

$G_2$  må tilfredstille disse betingelsene

$$\nabla^2 G_2(\vec{x}; \vec{a}) = 0, \quad -\infty < y < \eta, \quad (\text{A.2.0.10})$$

$$|\nabla G_2(\vec{x}; \vec{a})| \rightarrow 0, \quad \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty, \quad y < 0, \quad (\text{A.2.0.11})$$

og

$$-\nu G_2 + \frac{\partial G_2}{\partial y} = 0, \quad y = 0, \quad \text{hvor} \quad \nu = \frac{\omega^2}{g}. \quad (\text{A.2.0.12})$$

For å finne en løsning er det gunstig å Fourier transformere betingelsene i x-koordinatet. Ved å definere den Fourier transformerte som

$$\tilde{f}(k, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-ikx} dx, \quad (\text{A.2.0.13})$$

og det tilhørende inversjonsintegralet

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k, y) e^{ikx} dk. \quad (\text{A.2.0.14})$$

Den Fourier transformerte av ligning (A.2.0.10), har løsningene  $\tilde{\psi}_2 = A_1(k)e^{ky} + A_2(k)e^{-ky}$ . Ved å kreve at bevegelsen skal dø ut i  $y = -\infty$  (ligning A.2.0.11) forenkler  $\tilde{\psi}_2$  seg til

$$\tilde{\psi}_2 = A_1(k)e^{ky}. \quad (\text{A.2.0.15})$$

Dermed kan den Fourier transformerte av ligning (A.2.0.12) skrives som

$$-\nu A_1(k) + k A_1(k) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2b}{(x-a)^2 + b^2} e^{-ikx} dx = 0, \quad y = 0. \quad (\text{A.2.0.16})$$

Hvis man tolker integralet i ligning (A.2.0.16) som et "principal value integral" og anvender "residue teori", får man at integralet blir

$$p.v \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2b}{(x-a)^2 + b^2} e^{-ikx} dx = \begin{cases} -2\pi e^{-bk-ika} & (k \geq 0) \\ -2\pi e^{bk-ika} & (k < 0) \end{cases}, \quad (\text{A.2.0.17})$$

for  $b \leq 0$ .

Løser man så ligning (A.2.0.16) for  $A_1(k)$ , gir dette

$$A_1(k) = -2\pi \frac{e^{|k|b} e^{-ika}}{|k| - \nu}. \quad (\text{A.2.0.18})$$

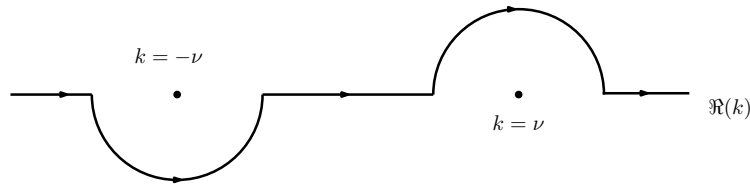
Nå kan  $\psi_2(\vec{x}, \vec{a})$  skrives som

$$\psi_2(\vec{x}, \vec{a}) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|k| - \nu} e^{|k|(y+b)} e^{ik(x-a)} dk. \quad (\text{A.2.0.19})$$

Deler man så opp integralet i ligning (A.2.0.19), og anvender strålingsbetingelsene for å bestemme integrasjonsveien rundt polene, gir dette følgende uttrykk for  $\psi_2(\vec{x}, \vec{a})$

$$\psi_2(\vec{x}, \vec{a}) = - \oint_{-\infty}^0 \frac{1}{-k - \nu} e^{-k(y+b)} e^{ik(x-a)} dk - \oint_0^{\infty} \frac{1}{k - \nu} e^{k(y+b)} e^{ik(x-a)} dk. \quad (\text{A.2.0.20})$$

$\oint$  betyr at integrasjonsveien er på undersiden av polen, og  $\oint$  på oversiden.



Figur A.2.0.2: Integrasjonsvei rundt polene

Det første integralet i ligning (A.2.0.20) har pol i  $k = -\nu$  og kan dermed skrives som

$$- \oint_{-\infty}^0 \frac{1}{-k - \nu} e^{-k(y+b)} e^{ik(x-a)} dk = -p.v \int_{-\infty}^0 \frac{1}{-k - \nu} e^{-k(y+b)} e^{ik(x-a)} dk + \pi i e^{\nu(y+b)} e^{-i\nu(x-a)}. \quad (\text{A.2.0.21})$$

Følger man samme fremgangsmåte på det andre integralet i ligning (A.2.0.20), og bruker at

integralet har pol i  $k = \nu$  får man tilsvarende

$$-\int_0^\infty \frac{1}{k-\nu} e^{k(y+b)} e^{ik(x-a)} dk = -p.v \int_{-\infty}^0 \frac{1}{k-\nu} e^{k(y+b)} e^{ik(x-a)} dk + \pi i e^{\nu(y+b)} e^{i\nu(x-a)}. \quad (\text{A.2.0.22})$$

Nå kan ligning (A.2.0.19) skrives på følgende form

$$\psi_2(\vec{x}, \vec{a}) = -2 p.v \int_0^\infty \frac{1}{k-\nu} e^{k(y+b)} \cos(k(x-a)) dk + 2\pi i e^{\nu(y+b)} \cos(\nu(x-a)), \quad (\text{A.2.0.23})$$

og dermed er Green funksjonen gitt ved

$$G_2(\vec{x}; \vec{a}) = \ln r - \ln r_1 - 2 p.v \int_0^\infty \frac{1}{k-\nu} e^{k(y+b)} \cos(k(x-a)) dk + 2\pi i e^{\nu(y+b)} \cos(\nu(x-a)). \quad (\text{A.2.0.24})$$

### A.3 3-D Green funksjon

Ved å definere funksjonen  $G_3(\vec{x}; \vec{a})$  som

$$G_3(\vec{x}; \vec{a}) = \frac{1}{r_2} + \psi_3(\vec{x}, \vec{a}), \quad (\text{A.3.0.25})$$

hvor

$$r_2 = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}. \quad (\text{A.3.0.26})$$

$G_3$  må tilfredstille følgende betingelser

$$\nabla^2 G_3 = 0 \quad -\infty < z < \eta, \quad (\text{A.3.0.27})$$

$$-\nu G_3 + \frac{\partial G_3}{\partial z} = 0 \quad z = 0, \quad \nu = \frac{\omega^2}{g}, \quad (\text{A.3.0.28})$$

$$|\nabla G_3| \rightarrow 0 \quad \text{når} \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty, \quad z < 0. \quad (\text{A.3.0.29})$$

Ved å definere den dobbel Fourier transformerte som

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \tilde{f}(k, \theta, z) e^{ik(x\cos\theta + y\sin\theta)} d\theta dk, \quad (\text{A.3.0.30})$$

blir den Fourier transformerte av Laplace ligningen

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}_3}{\partial z^2} = k^2 \tilde{\psi}_3, \quad (\text{A.3.0.31})$$

denne har løsningene

$$\tilde{\psi}_3 = A_3(k, \theta) e^{kz} + A_4(k, \theta) e^{-kz}. \quad (\text{A.3.0.32})$$

Ved å anvende  $|\nabla G_3| \rightarrow 0$   $z \rightarrow \infty$  forenkler dette seg til

$$\tilde{\psi}_3 = A_3(k, \theta) e^{kz}. \quad (\text{A.3.0.33})$$

Fourier transformerer man  $1/r_2$  får man at

$$\tilde{r}_2^{-1} = e^{-k|z-c|} e^{-ik(acos\theta + bsin\theta)}. \quad (\text{A.3.0.34})$$

Setter vi så inn for  $\tilde{r}_2^{-1} + \tilde{\psi}_3$  i den Fourier transformerte av den frie overflatebetingelsen ved  $z = 0$

$$-\nu(\tilde{r}_2^{-1} + \tilde{\psi}_3) + k\tilde{\psi}_3 - k\tilde{r}_2^{-1} = 0, \quad (\text{A.3.0.35})$$

og løser for  $A_3(k, \theta)$ , får man at  $A_3(k, \theta)$  kan skrives som

$$A_3(k, \theta) = \frac{\nu + k}{k - \nu} e^{kc} e^{-ik(acos\theta + bsin\theta)}. \quad (\text{A.3.0.36})$$

Det samlede uttrykket for  $\psi_3$  blir da

$$\psi_3 = \frac{1}{2\pi} p.v. \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \frac{\nu + k}{k - \nu} e^{k(z+c)} e^{ik((x-a)acos\theta + (y-b)sin\theta)} d\theta dk, \quad (\text{A.3.0.37})$$

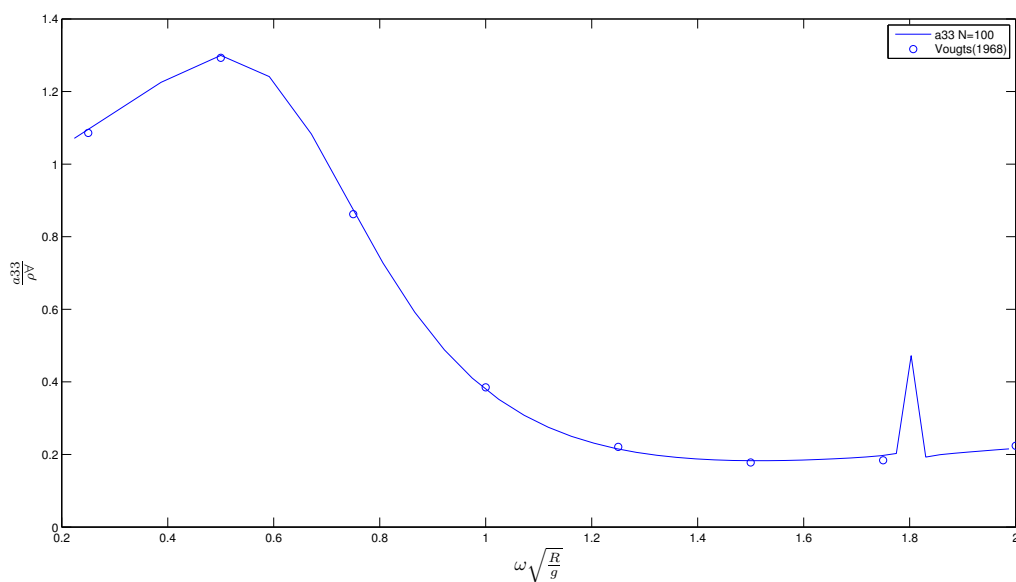
hvor  $p.v$  står for principal value.

# Tillegg B

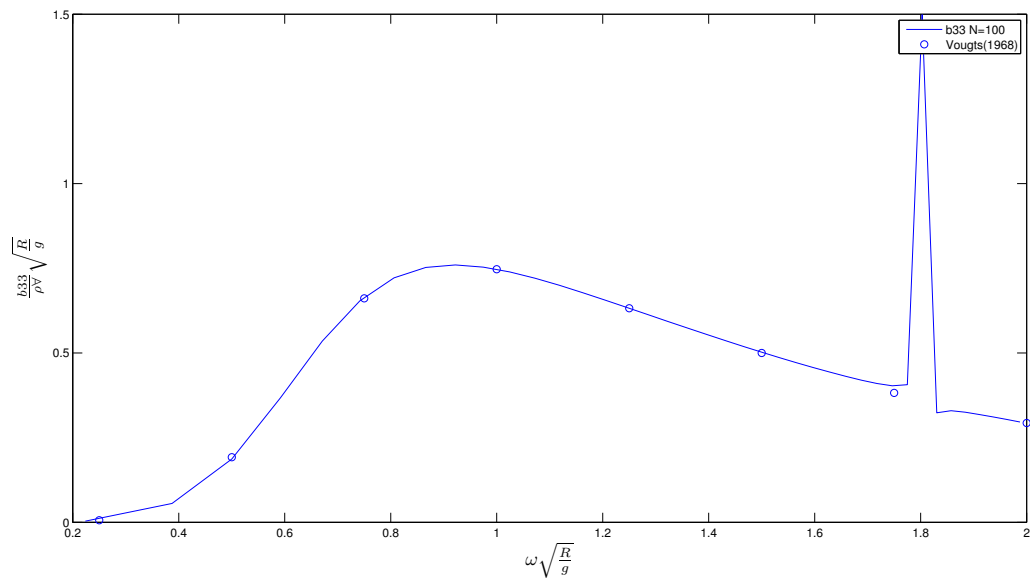
## Verifisering av 2-D lineær løser

### B.1 Numerisk mot eksperimentell

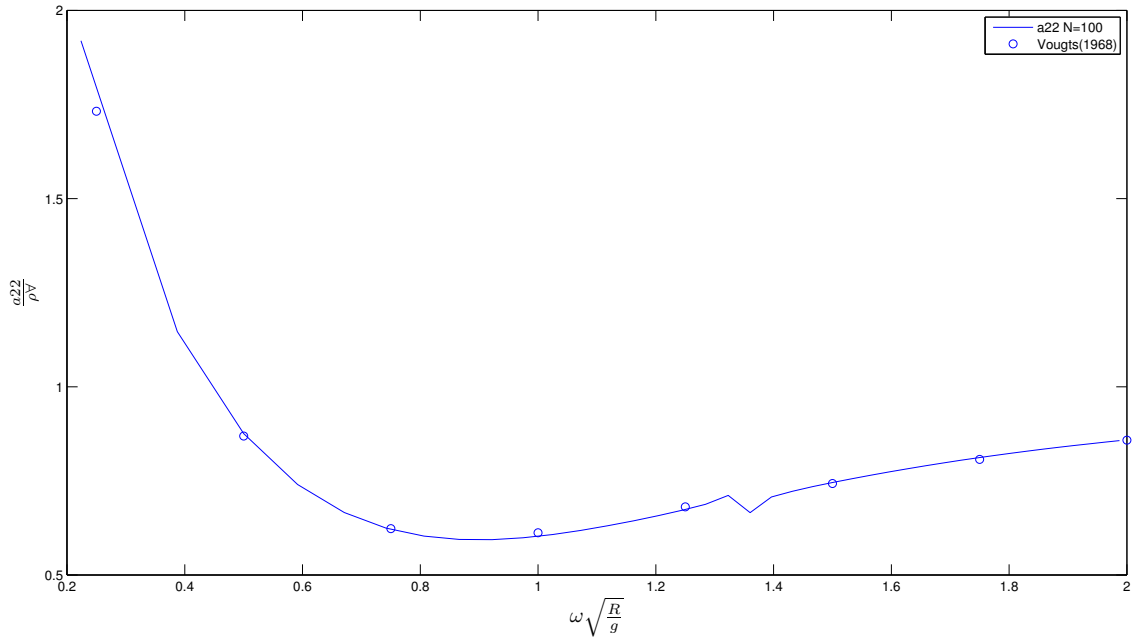
Figur (B.1.0.1, B.1.0.2, B.1.0.3 og B.1.0.4) viser plot av den adderte massen og dempningen i svai og hiv for en sirkulær sylinder. De utregnede adderte masser og dempningene er så plottet mot eksperimentelle data gitt av Vugts [16] ved Delft shipbuilding laboratory.



Figur B.1.0.1: Addert masse i svai



Figur B.1.0.2: Dempningen i svai



Figur B.1.0.3: Addert masse i hiv

## B.2 Energisjekk

En fin måte å verifisere løsningene er å gjøre et energiregnskap på hvor mye energi som kommer inn, og hvor mye som går ut. I et slikt system skal energien være bevart for alle verdier av  $k$  og  $t$ , hvor  $k$  og  $t$  er henholdsvis bølgetallet og tid. Det er i denne analysen betraktet en sirkulær sylinder med radius  $R$ .

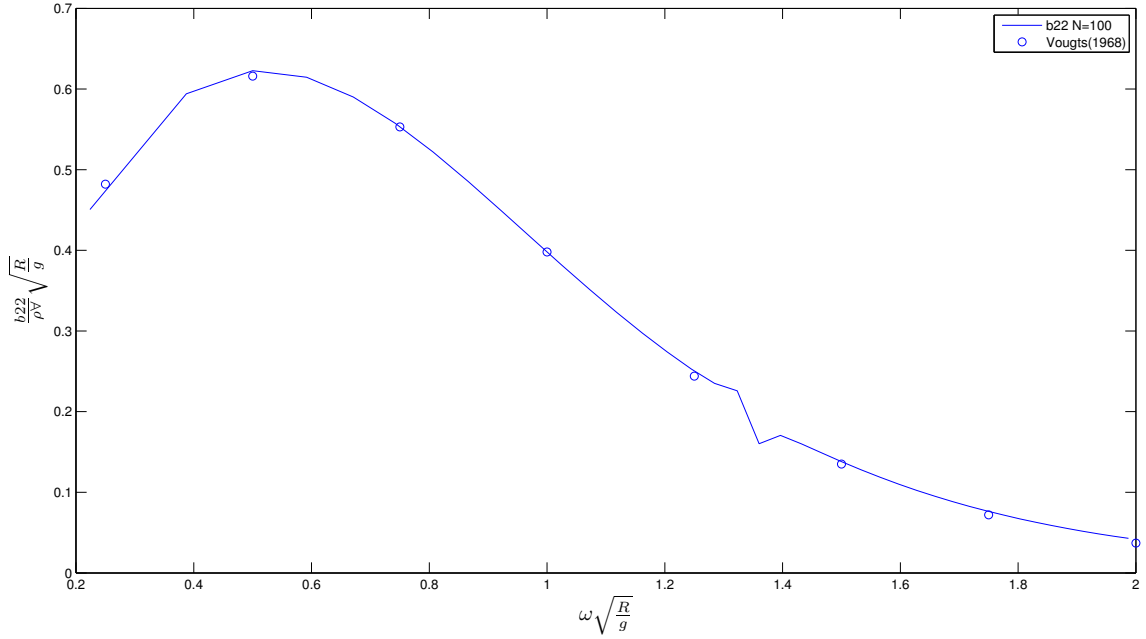
For gjøre en slik analyse må man evaluere Green funksjonen i fjærnfeltet

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \pm\infty} G(\vec{x}; \vec{a}) = 2\pi i e^{\nu(y+b) \mp i\nu(x-a)}, \quad (\text{B.2.0.1})$$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \pm\infty} \nabla_{\vec{a}} G(\vec{x}; \vec{a}) = \pm \begin{pmatrix} i\nu \\ \nu \end{pmatrix} 2\pi i e^{\nu(y+b) \mp i\nu(x-a)}. \quad (\text{B.2.0.2})$$

Ved å anvende Greens teorem kan  $\phi_7^{\pm\infty}(\vec{x})$  løses ved integralligningen

$$2\pi \phi_7^{\pm\infty}(\vec{x}) = \int_{S_w} (\phi_7^{\pm\infty}(\vec{a}) \frac{\partial G^{\pm\infty}(\vec{x}; \vec{a})}{\partial n} - G^{\pm\infty}(\vec{x}; \vec{a}) \frac{\partial \phi_7}{\partial n}) dS. \quad (\text{B.2.0.3})$$



Figur B.1.0.4: Dempning i hiv

Her er  $S_w$  definert som det våte arealet til geometrien.

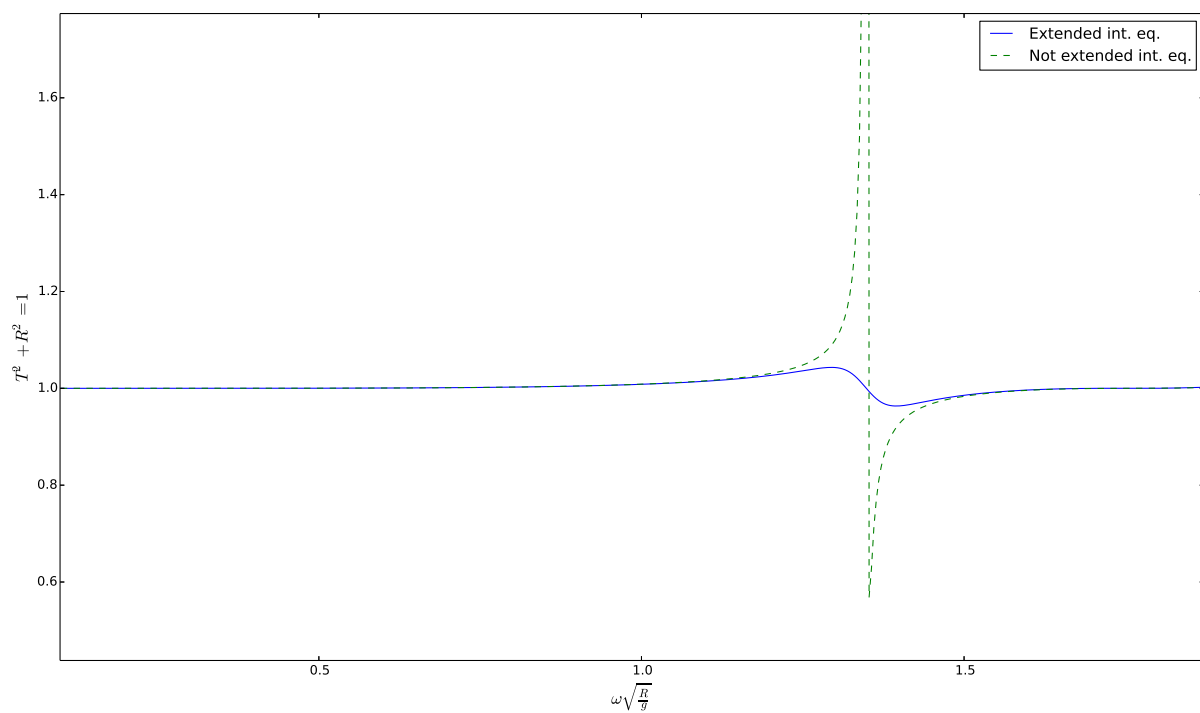
Ved å definere  $C_7^{\pm\infty} = \frac{\omega}{g2\pi} \int_{S_w} (\phi_7^{\pm\infty}(\vec{a}) \frac{\partial G^{\pm\infty}(\vec{x}; \vec{a})}{\partial n} - G^{\pm\infty}(\vec{x}; \vec{a}) \frac{\partial \phi_7}{\partial n}) dS$  kan man ved relasjonen  $T^2 + R^2 = 1$  sjekke at energien er bevart.  $T$  og  $R$  er gitt ved

$$T = i + C_7^\infty \quad (\text{B.2.0.4})$$

$$R = C_7^{-\infty}. \quad (\text{B.2.0.5})$$

Figur (B.2.0.5) viser hvordan energien holder seg konstant, mens i området  $\omega \sqrt{\frac{R}{g}} \in (1.1, 1.5)$  blir energien påvirket på lik linje som den adderte massen og dempningen av den irregulære frekvensen.





Figur B.2.0.5: Resultatene fra plottet viser at energien er bevart, untatt i området hvor den irregulære frekvensen dukker opp. Den irregulære frekvensen har ingenting med den fysiske løsningen å gjøre. I  $\omega\sqrt{R/g}$  er  $R$  radiusen til geometrien



# Tillegg C

## C.1 Fjerning av irregulær frekvens

Når geometrien ligger i overflaten lider løsningen til integralligningen av effekter fra irregulære frekvenser. Den irregulære frekvensen er ikke en fysisk oppførsel, men er en resonanseffekt som oppstår grunnet den ikke-fysiske indre bevegelen.

Ved å se på plottene av den adderte massen og dempningen i figur (B.1.0.1, B.1.0.2, B.1.0.3 og B.1.0.4 ) kan man tydelig se den irregulære frekvensen. Denne frekvensen kommer på forskjellig bølgetall avhengig av om det er svai, hiv eller rull. Den kommer som vist i figurene, for større bølgelengder i svai enn hiv.

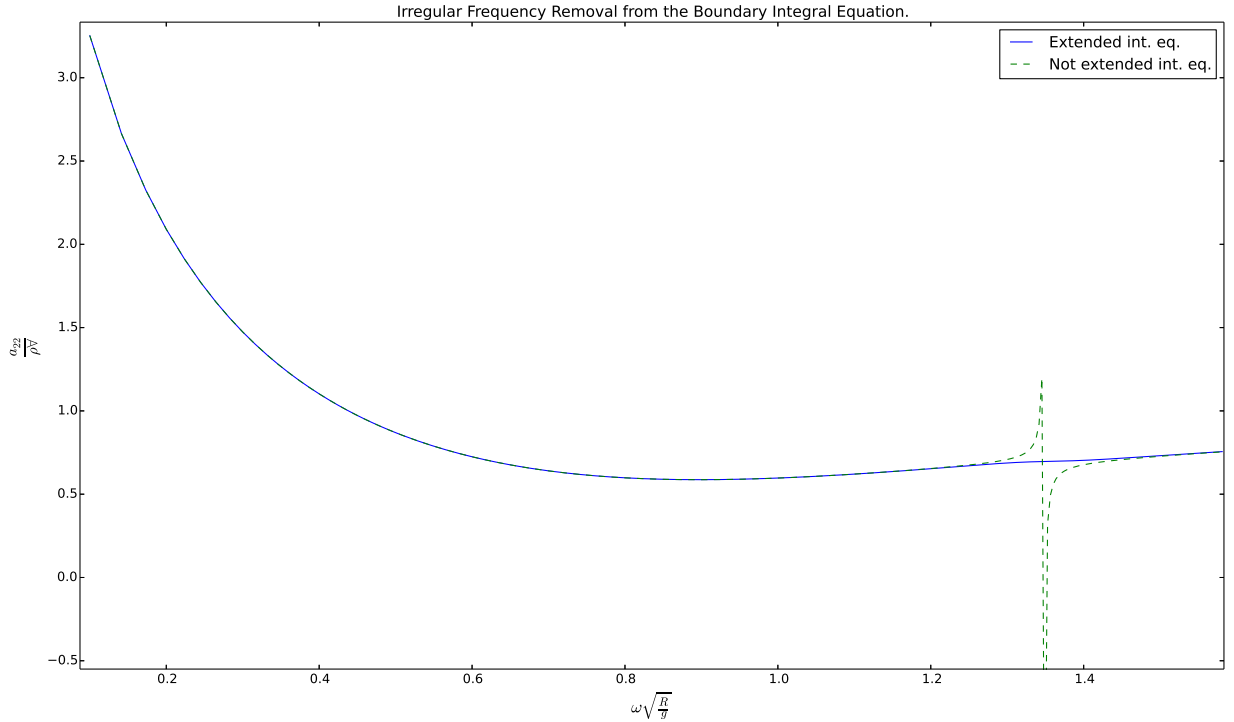
Løsningen er tydelig påvirket i og rundt området der den irregulære frekvensen dukker opp og dermed kan det være gunstig i noen tilfeller og fjerne denne. Et eksempel på dette er når man har to eller flere geometrier nære hverandre. Da vil den irregulære frekvensen fort kunne blandes med egenfrekvensen.

Det er flere som har utviklet metoder for å fjerne denne frekvensen. I denne analysen er det anvendt en metode bedre kjent som "The modified Green function method". Ideen er å diskretisere punkter inne i geometrien og dermed utvide integralligningen.

$$\iint_{S_w} (\phi_k(\vec{a}) \frac{\partial G(\vec{a}, \vec{x})}{\partial n} - G(\vec{a}, \vec{x}) n_k) dS = -2\pi \phi_k(\vec{x}), \quad \text{for } \vec{x} \text{ på } S_w. \quad (\text{C.1.0.1})$$

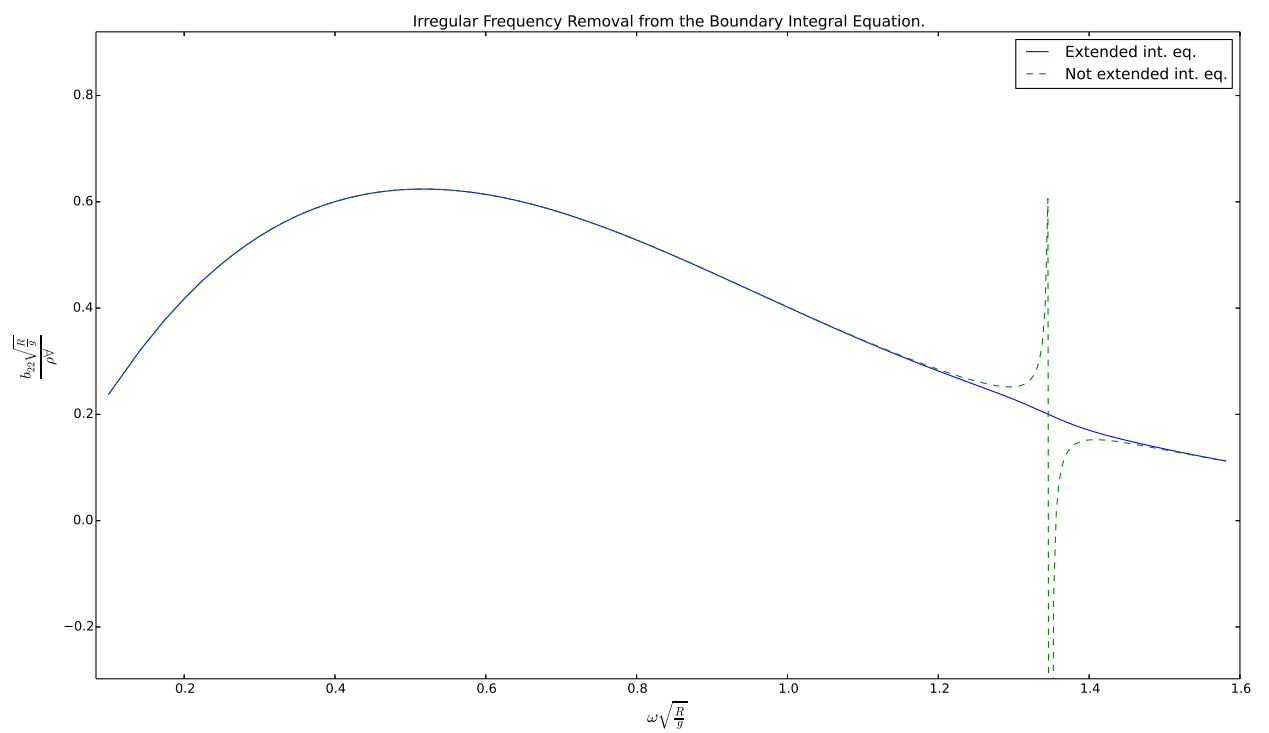
$$\iint_{S_w} (\phi_k(\vec{a}) \frac{\partial G(\vec{a}, \vec{x})}{\partial n} - G(\vec{a}, \vec{x}) n_k) dS = 0, \quad \text{for } \vec{x} \text{ inne i geometrien.} \quad (\text{C.1.0.2})$$

Ved å kombinere ligning (C.1.0.1) og (C.1.0.2) gir dette et overbestemt system som ikke inneholder irregulære frekvenser. For nærmere beskrivelse av utvidet integralligning se Zhu [18] og Lee et al. [9].

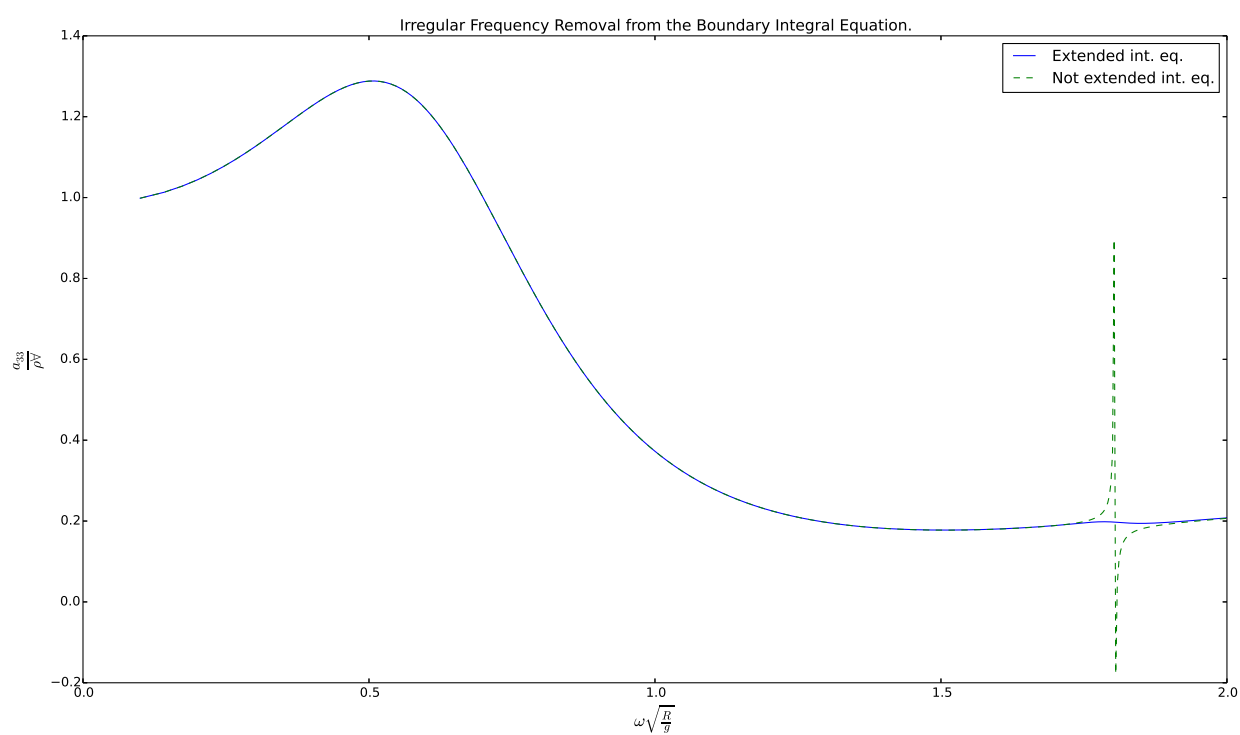


Figur C.1.0.1: Addert masse i hiv for en sirkulær sylinder med radius  $R$ . Den stiplede linjen representerer den adderte massen uten utvidelse av integralligningen, og den heltrukkede linjen med utvidelse. Man kan tydelig se at denne metoden fungerer veldig bra i dette tilfellet

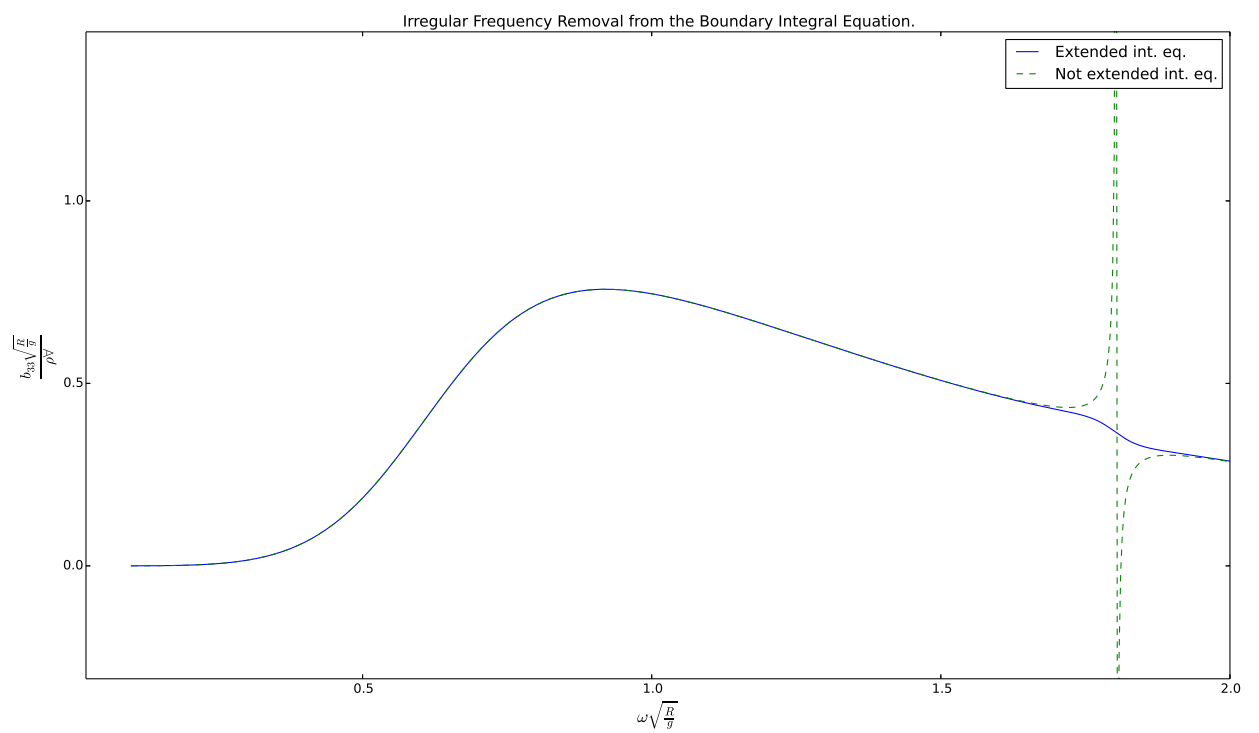
Figur (C.1.0.1, C.1.0.2, C.1.0.3 og C.1.0.4) viser hvor effektiv denne metoden er. Denne metoden går på bekostning av beregningstiden. Ved å utvide det lineære ligningssettet slik at den induerte hastighetsmatrisen får størrelse  $N \times M$  hvor  $M > N$ , gjør dette at CPU tiden øker jo flere punkter man diskretiserer med inne i geometrien.



Figur C.1.0.2: Dempning i hiv for en sirkulær sylinder



Figur C.1.0.3: Addert masse i svai for en sirkulær sylinder



Figur C.1.0.4: Dempning i svai for en sirkulær sylinder





# Tillegg D

## D.1 Ekvivalent linearisering

Uttrykket for kraften som virker i spalten lineariseres ved hjelp av ekvivalent linearisering. Ideen er å finne en variabel  $\kappa$  som gjør at arbeidet gjort over en periode er lik  $\kappa V(t)$ . Den vertikale hastigheten i spalten har følgende uttrykk

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t + \delta). \quad (\text{D.1.0.1})$$

Ved å definere

$$En_1 = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \kappa V(t) \cdot V(t) dt, \quad (\text{D.1.0.2})$$

$$En_2 = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} V(t) \cdot V(t) V(t) dt, \quad (\text{D.1.0.3})$$

får man ved å utføre integrasjonen i  $En_1$  og  $En_2$

$$En_1 = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \kappa V(t) \cdot V(t) dt = V_0^2 \kappa \frac{\pi}{\omega}, \quad (\text{D.1.0.4})$$

$$En_2 = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} V(t) \cdot V(t) V(t) dt = 4V_0^3 \frac{2}{3\omega}. \quad (\text{D.1.0.5})$$

Setter man så de to uttrykkene for energien lik hverandre og løser for  $\kappa$ , får man følgende

$$\kappa = \frac{8}{3\pi} V_0. \quad (\text{D.1.0.6})$$

Dermed kan  $V(t) \cdot V(t)$  skrives som  $\frac{8}{3\pi} V_0 V(t)$ .

# Tillegg E

## E.1 Løser av potensialet på randen

```
1 from scitools.std import *
2 from Geometries import twin_rec
3 from Geometries import twin_hull
4 from scipy.special import exp1 as expint
5 import numpy as np
6 import matplotlib.pyplot as plt
7
8 def solvertwin(R,T,B,T1,B1,Np,k,p):
9
10     """
11     Vecorized program
12
13     This program solves the potensial on the boundary fore two geometries that a
14     coupled.
15
16     Written by Trond Svandal
17
18     Input Values:
19
20     R = radius of circular hull structure
21     T = Draft of squared geometry
22     T1 = Draft second hull
23     B = width of squared geometry
24     B1 = with second hull
```

```

25 Np = number of panels
26 k  = wave number
27 p  = Distance from center of axis to center of geometry
28
29 Returns:
30
31 phix = sway potential
32 phiy = heave potential
33 phiz = roll potential
34 I     = induced velocity matrix
35 phi7 = Scatterd wave potential on boundary
36 phi0 = incoming wave on boundary
37
38 """
39
40 g=9.81;rho=1000.0 # gravity constant and density of fluid
41
42 # import geometri, and returning all normal vector, midpoint, end points angle
43 # , and position to integrate
44 zp,xm, zm,ym,nx,ny,xp,yp,n6,dL,delta,theta,zp1,xm1,zm1,ym1,nx1,ny1,xp1,yp1,n61
45 # ,dL1,delta1,theta1,npanels,\
46 # xm_SF,ym_SF,zm_SF,zp_SF,delta_SF= twin_rec(R,Np,T,B,T1,B1,p)
47
48 k=float(k) # wave number
49 omega=sqrt(g*k) # frequency
50 nu=float(omega**2/g) # wave number realation deep water
51
52 # Storage for calculated values in the induced velocity matrix #
53 u1aa=zeros((npanels,npanels))
54 v1aa=zeros((npanels,npanels))
55 u2aa=zeros((npanels,npanels))
56 v2aa=zeros((npanels,npanels))
57 u3aa=zeros((npanels,npanels))
58 v3aa=zeros((npanels,npanels))
59 u4aa=zeros((npanels,npanels))
60 v4aa=zeros((npanels,npanels))
61 B1aa=zeros((npanels,npanels))
62 B2aa=zeros((npanels,npanels))
63 B3aa=zeros((npanels,npanels))
64 B4aa=zeros((npanels,npanels))
65
66 u1ab=zeros((npanels,npanels))

```

```

65 v1ab=zeros((npanels,npanels))
66 u2ab=zeros((npanels,npanels))
67 v2ab=zeros((npanels,npanels))
68 u3ab=zeros((npanels,npanels))
69 v3ab=zeros((npanels,npanels))
70 u4ab=zeros((npanels,npanels))
71 v4ab=zeros((npanels,npanels))
72 B1ab=zeros((npanels,npanels))
73 B2ab=zeros((npanels,npanels))
74 B3ab=zeros((npanels,npanels))
75 B4ab=zeros((npanels,npanels))
76
77 u1bb=zeros((npanels,npanels))
78 v1bb=zeros((npanels,npanels))
79 u2bb=zeros((npanels,npanels))
80 v2bb=zeros((npanels,npanels))
81 u3bb=zeros((npanels,npanels))
82 v3bb=zeros((npanels,npanels))
83 u4bb=zeros((npanels,npanels))
84 v4bb=zeros((npanels,npanels))
85 B1bb=zeros((npanels,npanels))
86 B2bb=zeros((npanels,npanels))
87 B3bb=zeros((npanels,npanels))
88 B4bb=zeros((npanels,npanels))
89
90 u1ba=zeros((npanels,npanels))
91 v1ba=zeros((npanels,npanels))
92 u2ba=zeros((npanels,npanels))
93 v2ba=zeros((npanels,npanels))
94 u3ba=zeros((npanels,npanels))
95 v3ba=zeros((npanels,npanels))
96 u4ba=zeros((npanels,npanels))
97 v4ba=zeros((npanels,npanels))
98 B1ba=zeros((npanels,npanels))
99 B2ba=zeros((npanels,npanels))
100 B3ba=zeros((npanels,npanels))
101 B4ba=zeros((npanels,npanels))
102
103 # Storage for values calculated for the right hand side of equation Ax=b.
104
105 B_naax=zeros((npanels,npanels),dtype=complex)
106 B_nabx=zeros((npanels,npanels),dtype=complex)

```

```

107     B_nbax=zeros((npanels,npanels),dtype=complex)
108     B_nbbx=zeros((npanels,npanels),dtype=complex)
109
110     B_naay=zeros((npanels,npanels),dtype=complex)
111     B_naby=zeros((npanels,npanels),dtype=complex)
112     B_nbay=zeros((npanels,npanels),dtype=complex)
113     B_nbbz=zeros((npanels,npanels),dtype=complex)
114
115     B_naaz=zeros((npanels,npanels),dtype=complex)
116     B_nabz=zeros((npanels,npanels),dtype=complex)
117     B_nbaz=zeros((npanels,npanels),dtype=complex)
118     B_nbbz=zeros((npanels,npanels),dtype=complex)
119
120
121     #B_n=zeros((npanels,npanels))
122     bax=zeros(npanels,dtype=complex)
123     bbx=zeros(npanels,dtype=complex)
124
125     bay=zeros(npanels,dtype=complex)
126     bby=zeros(npanels,dtype=complex)
127
128     baz=zeros(npanels,dtype=complex)
129     bbz=zeros(npanels,dtype=complex)
130
131     B_naa = zeros((npanels,npanels),dtype=complex)
132     B_nab = zeros((npanels,npanels),dtype=complex)
133     B_nba = zeros((npanels,npanels),dtype=complex)
134     B_nbb = zeros((npanels,npanels),dtype=complex)
135     phi0L = zeros(npanels,dtype=complex)
136     phi0R = zeros(npanels,dtype=complex)
137     ba = zeros(npanels,dtype=complex)
138     bb = zeros(npanels,dtype=complex)
139
140     # integration loop #
141     for i in range(0,npanels):
142
143         # Calculate Left hand side of equation Ax=b
144
145         ### Gaa ###
146         u2aa[i,:] = -real( log((zm[i]-conj(zp[0:npanels]))/(zm[i]-conj(zp[1:
npanels+1]))))*exp(-1j*theta[0:npanels]))*nx[0:npanels]
147         v2aa[i,:] = -real( 1j*log((zm[i]-conj(zp[0:npanels]))/(zm[i]-conj(zp

```

```

148 [1:npanels+1])))*exp(-1j*theta[0:npanels]))*ny[0:npanels]
149
150 ##### Gab #####
151 ulab[i,:] = real( log((zm[i]-zp1[1:npanels+1])/(zm[i]-zp1[0:npanels])))*exp(-1
152 j*theta[0:npanels]))*nx1[0:npanels]
153 vlab[i,:] = real( 1j*log((zm[i]-zp1[1:npanels+1])/(zm[i]-zp1[0:npanels])))*
154 exp(-1j*theta[0:npanels]))*ny1[0:npanels]
155 u2ab[i,:] = -real( log((zm[i]-conj(zp1[0:npanels]))/(zm[i]-conj(zp1[1:
156 npanel+1])))*exp(-1j*theta[0:npanels]))*nx1[0:npanels]
157 v2ab[i,:] = -real( 1j*log((zm[i]-conj(zp1[0:npanels]))/(zm[i]-conj(zp1
158 [1:npanels+1])))*exp(-1j*theta[0:npanels]))*ny1[0:npanels]
159
160 ##### Gbb #####
161 u2bb[i,:] = -real( log((zm1[i]-conj(zp1[0:npanels]))/(zm1[i]-conj(zp1[1:
162 npanel+1])))*exp(-1j*theta[0:npanels]))*nx1[0:npanels]
163 v2bb[i,:] = -real( 1j*log((zm1[i]-conj(zp1[0:npanels]))/(zm1[i]-conj(zp1
164 [1:npanels+1])))*exp(-1j*theta[0:npanels]))*ny1[0:npanels]
165
166 ##### Gba #####
167 ulba[i,:] = real( log((zm1[i]-zp[1:npanels+1])/(zm1[i]-zp[0:npanels])))*exp(-1
168 j*theta[0:npanels]))*nx[0:npanels]
169 vlba[i,:] = real( 1j*log((zm1[i]-zp[1:npanels+1])/(zm1[i]-zp[0:npanels])))*
170 exp(-1j*theta[0:npanels]))*ny[0:npanels]
171 u2ba[i,:] = -real( log((zm1[i]-conj(zp[0:npanels]))/(zm1[i]-conj(zp[1:
172 npanel+1])))*exp(-1j*theta[0:npanels]))*nx[0:npanels]
173 v2ba[i,:] = -real( 1j*log((zm1[i]-conj(zp[0:npanels]))/(zm1[i]-conj(zp
174 [1:npanels+1])))*exp(-1j*theta[0:npanels]))*ny[0:npanels]
175
176 # input values for the exponential integral defined by Abrahamowitz and
177 Stegun
178 Z0= -1j*nu*(zm[i]-conj(zm[0:npanels]))
179 Z1= -1j*nu*(zm[i]-conj(zm1[0:npanels]))
180 Z2= -1j*nu*(zm1[i]-conj(zm[0:npanels]))
181 Z3= -1j*nu*(zm1[i]-conj(zm1[0:npanels]))
182
183 # Up or Down side of the pole
184 delta3=delta
185 delta2= -1.0
186 delta1 =1.0
187
188 ##### Gaa #####

```

```

178         u3aa[i,:]=real(-2*(1j*nu*exp(Z0)*expint(Z0)+ 1/(zm[i]-conj(zm[0:
npanels])))+2*pi*nu*delta[i,0:npanels]*exp(Z0))*dL[0:npanels]*nx[0:npanels]
179         v3aa[i,:]= real(-2*(nu*exp(Z0)*expint(Z0)- 1j/(zm[i]-conj(zm[0:npanels]))))
-2*pi*1j*nu*delta[i,0:npanels]*exp(Z0))*dL[0:npanels]*ny[0:npanels]
180         u4aa[i,:]= real(1j*2*pi*nu*exp(Z0))*dL[0:npanels]*nx[0:npanels]
181         v4aa[i,:]= real(2*pi*nu*exp(Z0))*dL[0:npanels]*ny[0:npanels]
182
183     ### Gab ###
184         u3ab[i,:]=real(-2*(1j*nu*exp(Z1)*expint(Z1)+ 1/(zm[i]-conj(zm1[0:
npanels])))+2*pi*nu*delta1*exp(Z1))*dL1[0:npanels]*nx1[0:npanels]
185         v3ab[i,:]= real(-2*(nu*exp(Z1)*expint(Z1)- 1j/(zm[i]-conj(zm1[0:npanels]))))
-2*pi*1j*nu*delta1*exp(Z1))*dL1[0:npanels]*ny1[0:npanels]
186         u4ab[i,:]= real(1j*2*pi*nu*exp(Z1))*dL1[0:npanels]*nx1[0:npanels]
187         v4ab[i,:]= real(2*pi*nu*exp(Z1))*dL1[0:npanels]*ny1[0:npanels]
188
189     ### Gba###
190         u3ba[i,:]=real(-2*(1j*nu*exp(Z2)*expint(Z2)+ 1/(zm1[i]-conj(zm[0:
npanels])))+2*pi*nu*delta2*exp(Z2))*dL[0:npanels]*nx[0:npanels]
191         v3ba[i,:]= real(-2*(nu*exp(Z2)*expint(Z2)- 1j/(zm1[i]-conj(zm[0:npanels]))))
-2*pi*1j*nu*delta2*exp(Z2))*dL[0:npanels]*ny[0:npanels]
192         u4ba[i,:]= real(1j*2*pi*nu*exp(Z2))*dL[0:npanels]*nx[0:npanels]
193         v4ba[i,:]= real(2*pi*nu*exp(Z2))*dL[0:npanels]*ny[0:npanels]
194
195     ### Gbb ###
196         u3bb[i,:]=real(-2*(1j*nu*exp(Z3)*expint(Z3)+ 1/(zm1[i]-conj(zm1[0:
npanels])))+2*pi*nu*delta3[i,0:npanels]*exp(Z3))*dL1[0:npanels]*nx1[0:
npanels]
197         v3bb[i,:]= real(-2*(nu*exp(Z3)*expint(Z3)- 1j/(zm1[i]-conj(zm1[0:npanels]))))
-2*pi*1j*nu*delta3[i,0:npanels]*exp(Z3))*dL1[0:npanels]*ny1[0:npanels]
198         u4bb[i,:]= real(1j*2*pi*nu*exp(Z3))*dL1[0:npanels]*nx1[0:npanels]
199         v4bb[i,:]= real(2*pi*nu*exp(Z3))*dL1[0:npanels]*ny1[0:npanels]
200
201     # calculate Right hand side of equation Ax=b
202
203     ### Baa ###
204     r1aa= sqrt(real(zm[0:npanels]-zm[i])**2 + imag(zm[0:npanels]-zm[i])**2)
205     r2aa= sqrt(real(conj(zm[0:npanels])-zm[i])**2 + imag(conj(zm[0:npanels])-zm[
i])**2)
206     B2aa[i,:]= -log(r2aa)
207     B3aa[i,:] = real(-2*exp(Z0)*(expint(Z0)+1j*pi*delta[i,0:npanels]))
208     B4aa[i,:] = real(2*pi*exp(Z0))
209

```



```

210     ### Bab ###
211     r1ab= sqrt(real(zm1[0:npanels]-zm[i])**2 + imag(zm1[0:npanels]-zm[i])**2)
212     r2ab= sqrt(real(conj(zm1[0:npanels])-zm[i])**2 + imag(conj(zm1[0:npanels])-
zm[i])**2)
213     B1ab[i,:]= log(r1ab)
214     B2ab[i,:]= -log(r2ab)
215     B3ab[i,:] = real(-2*exp(Z1)*(expint(Z1)+1j*pi*delta1) )
216     B4ab[i,:] = real(2*pi*exp(Z1))
217
218     ### Bba ###
219     r1ba= sqrt(real(zm[0:npanels]-zm1[i])**2 + imag(zm[0:npanels]-zm1[i])**2)
220     r2ba= sqrt(real(conj(zm[0:npanels])-zm1[i])**2 + imag(conj(zm[0:npanels])-
zm1[i])**2)
221     B1ba[i,:]= log(r1ba)
222     B2ba[i,:]= -log(r2ba)
223     B3ba[i,:] = real(-2*exp(Z2)*(expint(Z2)+1j*pi*delta2) )
224     B4ba[i,:] = real(2*pi*exp(Z2))
225
226     ### Bab ###
227     r1bb= sqrt(real(zm1[0:npanels]-zm1[i])**2 + imag(zm1[0:npanels]-zm1[i])**2)
228     r2bb= sqrt(real(conj(zm1[0:npanels])-zm1[i])**2 + imag(conj(zm1[0:npanels])-
zm1[i])**2)
229     B2bb[i,:]= -log(r2bb)
230     B3bb[i,:] = real(-2*exp(Z3)*(expint(Z3)+1j*pi*delta3[i,0:npanels]) )
231     B4bb[i,:] = real(2*pi*exp(Z3))
232
233     with np.errstate(divide='ignore'):
234         ulaa[i,:] =real( log((zm[i]-zp[1:npanels+1])/(zm[i]-zp[0:npanels]))*exp(-1
j*theta[0:npanels]))*nx[0:npanels]
235         vlaa[i,:] = real( 1j*log((zm[i]-zp[1:npanels+1])/(zm[i]-zp[0:npanels]))*
exp(-1j*theta[0:npanels]))*ny[0:npanels]
236         ulbb[i,:] =real( log((zm1[i]-zp1[1:npanels+1])/(zm1[i]-zp1[0:npanels]))*
exp(-1j*theta1[0:npanels]))*nx1[0:npanels]
237         vlbb[i,:] = real( 1j*log((zm1[i]-zp1[1:npanels+1])/(zm1[i]-zp1[0:npanels]))
)*exp(-1j*theta1[0:npanels]))*ny1[0:npanels]
238         B1bb[i,:]= log(r1bb)
239         B1aa[i,:]= log(r1aa)
240
241     for j in range(0,npanels):
242         if i==j:
243             B1aa[i,j]=log(0.5*dL[j])
244             B1bb[i,j]=log(0.5*dL1[j])

```

```

245 #np.fill_diagonal(B1aa, log(0.5*dL[i]))
246 #np.fill_diagonal(B1bb, log(0.5*dL1[i]))
247
248
249 #### B_nx ####
250 B_naax[i,:] = (B1aa[i,0:npanels] + B2aa[i,0:npanels] + B3aa[i,0:npanels] +
251               1j*B4aa[i,0:npanels])*nx[0:npanels]*dL[0:npanels]
252 B_nabx[i,:] = (B1ab[i,0:npanels] + B2ab[i,0:npanels] + B3ab[i,0:npanels] +
253               1j*B4ab[i,0:npanels])*nx1[0:npanels]*dL1[0:npanels]
254 B_nbax[i,:] = (B1ba[i,0:npanels] + B2ba[i,0:npanels] + B3ba[i,0:npanels] +
255               1j*B4ba[i,0:npanels])*nx[0:npanels]*dL[0:npanels]
256 B_nbbx[i,:] = (B1bb[i,0:npanels] + B2bb[i,0:npanels] + B3bb[i,0:npanels] +
257               1j*B4bb[i,0:npanels])*nx1[0:npanels]*dL1[0:npanels]
258
259 #### B_ny ####
260 B_naay[i,:] = (B1aa[i,0:npanels] + B2aa[i,0:npanels] + B3aa[i,0:npanels] +
261               1j*B4aa[i,0:npanels])*ny[0:npanels]*dL[0:npanels]
262 B_naby[i,:] = (B1ab[i,0:npanels] + B2ab[i,0:npanels] + B3ab[i,0:npanels] +
263               1j*B4ab[i,0:npanels])*ny1[0:npanels]*dL1[0:npanels]
264 B_nbay[i,:] = (B1ba[i,0:npanels] + B2ba[i,0:npanels] + B3ba[i,0:npanels] +
265               1j*B4ba[i,0:npanels])*ny[0:npanels]*dL[0:npanels]
266 B_nbby[i,:] = (B1bb[i,0:npanels] + B2bb[i,0:npanels] + B3bb[i,0:npanels] +
267               1j*B4bb[i,0:npanels])*ny1[0:npanels]*dL1[0:npanels]
268
269 #### B_nz ####
270 B_naaz[i,:] = (B1aa[i,0:npanels] + B2aa[i,0:npanels] + B3aa[i,0:npanels] +
271               1j*B4aa[i,0:npanels])*n6[0:npanels]*dL[0:npanels]
272 B_nabz[i,:] = (B1ab[i,0:npanels] + B2ab[i,0:npanels] + B3ab[i,0:npanels] +
273               1j*B4ab[i,0:npanels])*n61[0:npanels]*dL1[0:npanels]
274 B_nbaz[i,:] = (B1ba[i,0:npanels] + B2ba[i,0:npanels] + B3ba[i,0:npanels] +
275               1j*B4ba[i,0:npanels])*n6[0:npanels]*dL[0:npanels]
276 B_nbbz[i,:] = (B1bb[i,0:npanels] + B2bb[i,0:npanels] + B3bb[i,0:npanels] +
277               1j*B4bb[i,0:npanels])*n61[0:npanels]*dL1[0:npanels]
278
279 #### derivative of incoming wave on boundary ####
280 phiIdxaa = omega*exp(k*ym[:]-1j*k*xm[:])
281 phiIdyaa = 1j*omega*exp(k*ym[:]-1j*k*xm[:])
282 phiIdxbb = omega*exp(k*ym1[:]-1j*k*xm1[:])
283 phiIdybb = 1j*omega*exp(k*ym1[:]-1j*k*xm1[:])
284
285 #### Incoming wave on boundary ####
286 phi0L[i] = 1j*g/omega *exp(k*ym[i]-1j*k*xm[i])

```

```

275     phi0R[i]= 1j*g/omega *exp(k*ym1[i]-1j*k*xm1[i])
276
277     # righthand side for solving scattering wave potential
278     B_naa[i,:]= -( B1aa[i,:]+B2aa[i,:] + B3aa[i,:] +1j*B4aa[i,:] )*dL[:]*(
279     phiIdxaa*nx[:]+phiIdyaa*ny[:])
280     B_nab[i,:]= -( B1ab[i,:]+B2ab[i,:] + B3ab[i,:] +1j*B4ab[i,:] )*dL1[:]*(
281     phiIdxbb*nx1[:]+phiIdybb*ny1[:])
282     B_nba[i,:]= -( B1ba[i,:]+B2ba[i,:] + B3ba[i,:] +1j*B4ba[i,:] )*dL[:]*(
283     phiIdxaa*nx[:]+phiIdyaa*ny[:])
284     B_nbb[i,:]= -( B1bb[i,:]+B2bb[i,:] + B3bb[i,:] +1j*B4bb[i,:] )*dL1[:]*(
285     phiIdxbb*nx1[:]+phiIdybb*ny1[:])
286
287     # Storage of b in equation Ax=b
288
289     ba[i]=sum( B_naa[i,:])+sum( B_nab[i,:])
290     bb[i]=sum( B_nba[i,:])+sum( B_nbb[i,:])
291
292     bax[i]=sum( B_naax[i,0:npanels]) +sum( B_nabx[i,0:npanels])
293     bbx[i]=sum( B_nbax[i,0:npanels]) +sum( B_nbbx[i,0:npanels])
294
295     bay[i]=sum( B_naay[i,0:npanels]) +sum( B_naby[i,0:npanels])
296     bby[i]=sum( B_nbay[i,0:npanels]) +sum( B_nbby[i,0:npanels])
297
298     baz[i]=sum( B_naaz[i,0:npanels]) +sum( B_nabz[i,0:npanels])
299     bbz[i]=sum( B_nbaz[i,0:npanels]) +sum( B_nbbz[i,0:npanels])
300
301     bx= np.append(bax,bbx)
302     by= np.append(bay,bby)
303     bz= np.append(baz,bbz)
304
305     b = np.append(ba,bb)
306
307     np.fill_diagonal(ulaa, 0.0)
308     np.fill_diagonal(vlaa, 0.0)
309     np.fill_diagonal(ulbb, 0.0)
310     np.fill_diagonal(vlbb, 0.0)
311
312     # Component of the derivatives of Green function

```

```

313 I1 = u1aa+v1aa+u2aa+v2aa+u3aa+v3aa+1j*u4aa+1j*v4aa # velocity induces from Gaa
314 I2 = u1ab+v1ab+u2ab+v2ab+u3ab+v3ab+1j*u4ab+1j*v4ab # velocity induces from Gab
315 I3 = u1ba+v1ba+u2ba+v2ba+u3ba+v3ba+1j*u4ba+1j*v4ba # velocity induces from Gba
316 I4 = u1bb+v1bb+u2bb+v2bb+u3bb+v3bb+1j*u4bb+1j*v4bb # velocity induces from Gbb
317
318 # Total induced veolcity matix
319 I = np.bmat([[I1, I2], [I3, I4]])- eye(2*npanels)*pi
320
321
322 # Solve linear system for potential on boundary
323 phix=np.linalg.solve(I,bx)
324 phiy=np.linalg.solve(I,by)
325 phiz=np.linalg.solve(I,bz)
326 phi7=np.linalg.solve(I,b)
327
328 # values of incoming wave on boundary
329 phi0=np.append(phi0L,phi0R)
330
331
332 return phix,phiy,phiz,I,phi7,phi0
333
334 if __name__ == '__main__':
335     R = 1.0; p = 1.1
336     B=2.0;B1=2.0;
337
338     T=0.3;T1=0.3;
339     Np = 12 * 4
340     k = 0.01
341     dk = 0.02
342     Nk = 150
343
344
345     plt.rcParams.update({'font.size': 22})
346     phix,phiy,phiz,I,phi7,phi0 = solvertwin(R,T,B,T1,B1,Np,k,p)
347     plt.plot(real(phiy))
348     plt.show()

```

## E.2 Script av den iterativ metoden

```

1 # loop on mean eta values
2
3 from scitools.std import *

```

```

4 from Field_potential_twin import potenital_field
5 from Geometries import twin_rec
6 from BEM_twinsolver_vec import solvertwin
7 from calculate_mean_eta import mean_eta
8 from scipy.special import expl as expint
9 from second_order_phi_field import sec_ord_field
10 from second_order_phi_on_sb import second_order_on_sb
11 import numpy as np
12 import matplotlib.pyplot as plt
13 import cmath
14
15
16 def combined_solution(R,T,B,T1,B1,Np,k,p,A):
17
18     """
19     This program Solves wave elevation in gap with aritmetic mean iteration.
20
21     Written by Trond Svandal
22
23     Input Values:
24
25     R = radius of circular hull structure
26     T = Draft of squared geometry
27     T1 = Draft second hull
28     B = width of squared geometry
29     B1 = with second hull
30     Np = number of panels
31     k = wave number
32     p = Distance from center of axis to center of geometry
33
34     Returns:
35
36     eta = wave elevation in center between hull
37
38     """
39
40
41     # number of iteration alowed for convergence
42     N_con = 180
43
44     # import geometri
45     zp,xm, zm,ym,nx,ny,xp,yp,n6,dL,delta ,theta ,zp1,xm1,zm1,ym1,nx1,ny1,xp1,yp1,n61

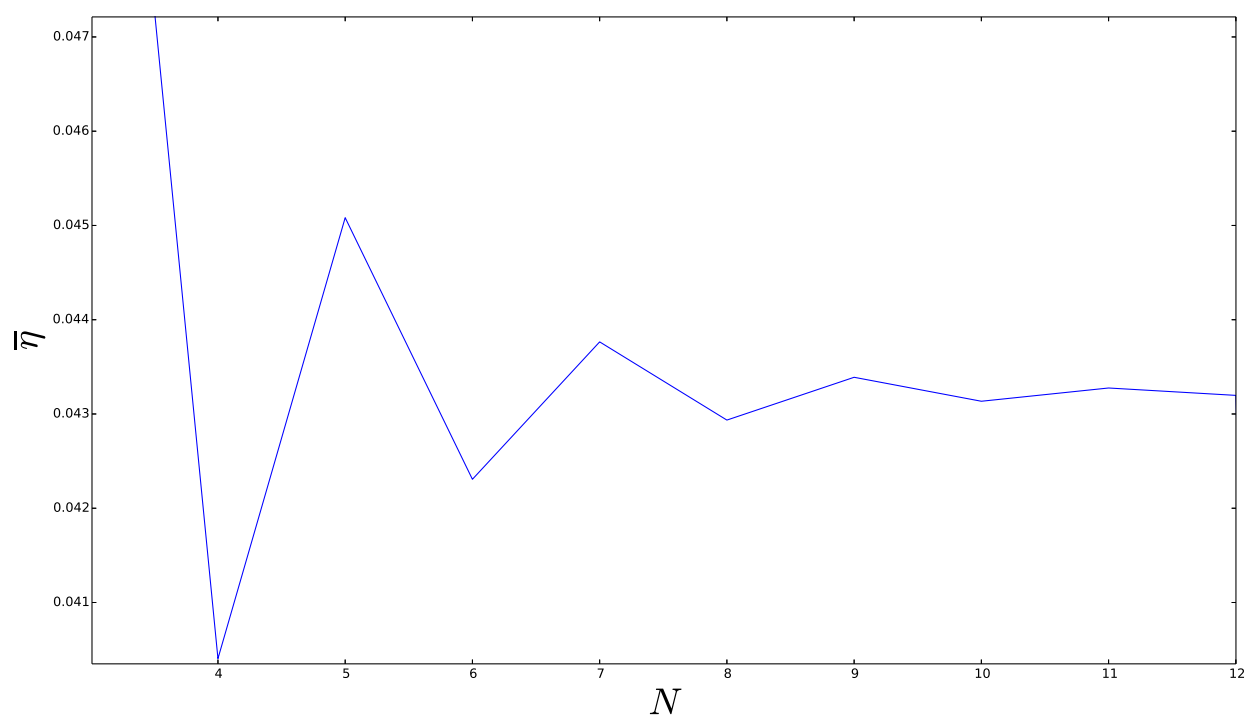
```

```

, dL1, delta1, theta1, npanels, \
46   xm_SF, ym_SF, zm_SF, zp_SF, delta_SF= twin_rec(R, Np, T, B, T1, B1, p)
47
48 # potential on boundary
49 phix, phiy, phiz, I, phi7, phi0 = solvertwin(R, T, B, T1, B1, Np, k, p)
50
51 # potential in field + linear eta, and mean etavalues calculated from linear
   eta.
52 PHI_field, eta, etam, phix_field, phiy_field, phiz_field, phi7_field, phiDF, I_FIELD,
   epsR, epsI, phase_diffraction, phase_radiation = potenital_field(R, T, B, T1, B1, Np,
   k, p, A)
53
54 ns = len(phiy_field)
55 # Storage
56 Etam_val=zeros(N_con+1)
57 Etam_val[0] = etam[ns/2.0]
58 x_val=linspace(0, N_con, N_con+1)
59
60 # iteration loop
61 for i in range(N_con):
62
63     # find eta in gap with correction from nonlinearities
64     eta_damped= sec_ord_field(R, T, B, T1, B1, Np, k, p, A, Etam_val[i])
65
66     # calculate new eta mean from correction eta in gap
67     eta_mean_new = mean_eta(k, eta_damped)
68     print eta_mean_new, etam[ns/2.0]
69
70
71     eta =eta_damped
72
73     # Aritmetic mean from corrected mean eta and not corrected.
74     Etam_val[i+1] = (eta_mean_new + Etam_val[i])/2.0
75
76     # convergent test, critation 0.001 could be changed if lower critation need
77     if abs(Etam_val[i+1]-Etam_val[i]) <=0.001:
78         break
79
80
81 #plt.plot(x_val, Etam_val)
82 #plt.ylabel(r"$\overline{\eta}$", fontsize=35)
83 #plt.xlabel(r"$N$", fontsize=35)

```

```
84 #plt.show()  
85 return eta
```



Figur E.2.0.1: Konvergens av den iterative metoden.  $N$  er antall iterasjoner





# Bibliografi

- [1] Milton Abramowitz and Irene A Stegun. *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*. Courier Dover Publications, page 228, 2012.
- [2] X.B Chen and L Lu. Dissipation in the gap resonance between two bodies, 2012. URL <http://www.veristar.com/portal/veristarinfo>.
- [3] Chen XB. Hydrodynamic analysis for offshore LNG terminals. *In: Proc 2nd int workshop on applied offshore hydrodynamics.*, 2005.
- [4] Werner Frank. Oscillation of cylinders in or below the free surface of deep fluids. Technical report, DTIC Document, 1967.
- [5] R H M Huijsmans, J A Pinkster, and J J de Wilde. Diffraction and Radiation of Waves Around Side-by-Side Moored Vessels. In *Proceedings of the Eleventh International Offshore and Polar Engineering Conference*, pages 406–412, 2001. ISBN 1-880653-52-4.
- [6] Fritz John. On the motion of floating bodies II. Simple harmonic motions. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 3(1):45–101, March 1950.
- [7] Kawasaki. FPSO (Floating Production Storage & Offloading) Use Marine Boiler, 2015. URL [http://global.kawasaki.com/en/energy/solutions/energy\\_plants/fpso\\_boiler.html](http://global.kawasaki.com/en/energy/solutions/energy_plants/fpso_boiler.html).
- [8] T. Kristiansen and O.M. Faltinsen. A two-dimensional numerical and experimental study of resonant coupled ship and piston-mode motion. *Applied Ocean Research*, 32(2):158–176, April 2010. ISSN 01411187. doi: 10.1016/j.apor.2009.10.001. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141118709000893>.
- [9] C.-H Lee, J. N Newman, and X Zhu. An extended boundary integral equation method for the removal of irregular frequency effects. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 23(7):637–660, October 1996. ISSN 0271-

2091. doi: 10.1002/(SICI)1097-0363(19961015)23:7<637::AID-FLD437>3.0.CO;2-3. URL <http://www.researchgate.net/publication>.
- [10] T Marthinsen and T Vinje. Nonlinear hydrodynamic interaction in offshore loading systems. 1985. URL <http://trid.trb.org/view.aspx?id=420862>.
- [11] P. McIver. Complex resonances in the water-wave problem for a floating structure. *Journal of Fluid Mechanics*, 536:423–443, July 2005. ISSN 0022-1120. doi: 10.1017/S0022112005005021. URL [http://journals.cambridge.org/abstract\\_S0022112005005021](http://journals.cambridge.org/abstract_S0022112005005021).
- [12] Bernard Molin. On the piston and sloshing modes in moonpools. *Journal of Fluid Mechanics*, 430:27–50, 2001.
- [13] Bernard Molin, Fabien Remy, A. Camhi, and A. Ledoux. Experimental and numerical study of the gap resonances in-between two rectangular barges., 2009. URL <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00454571/>.
- [14] John Nicholas Newman. *Marine hydrodynamics*. MIT press, 1977.
- [15] John Nicholas Newman. Application of generalized modes for the simulation of free surface patches in multiple body interactions, WAMIT Consortium Report, 2003. URL <http://www.wamit.com/Reports/Report03.pdf>.
- [16] J H Vugts. The hydrodynamic coefficients for swaying, heaving and rolling cylinders in a free surface. Technical report, 1968.
- [17] Xin Xu, Jian-Min Yang, Xin Li, and Liangyu Xu. Hydrodynamic performance study of two side-by-side barges. July 2014. URL <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/17445302.2014.889368>.
- [18] Xuemei Zhu. Irregular frequency removal from the boundary integral equation for the wave-body problem, 1994.